

Lezioni di geometria iperbolica

Bruno Martelli

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TONELLI", LARGO PONTECORVO 5, 56127
PISA, ITALY

E-mail address: martelli at dm dot unipi dot it

Versione del 20 gennaio 2012

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1. Lo spazio iperbolico	3
1. Richiami di geometria riemanniana	3
2. I modelli dello spazio iperbolico	12
3. Compattificazione e isometrie dello spazio iperbolico	25
Capitolo 2. Varietà iperboliche	35
1. Gruppi di isometrie	35
2. Spazio di Teichmüller	43
Capitolo 3. Varietà con singolarità	65
1. Orbifold	65
2. Completamenti metrici e varietà con singolarità coniche	79
Capitolo 4. Teorema di rigidità di Mostow	81
1. Volumi di varietà iperboliche	81
2. Teorema di rigidità di Mostow	95

Introduzione

Il testo è rilasciato con licenza *Creative Commons-BY-SA*. Questa licenza permette di distribuire, modificare, creare opere derivate dall'originale, anche a scopi commerciali, a condizione che venga riconosciuta la paternità dell'opera all'autore e che alla nuova opera vengano attribuite le stesse licenze dell'originale.

Le figure presenti sono tutte di pubblico dominio (sia quelle create da me che quelle scaricate da Wikipedia, che erano già in pubblico dominio), tranne le seguenti che sono in licenza CC-BY-SA e possono essere scaricate da Wikipedia:

- Fig. 6 (proiezione stereografica di un panorama parigino) nel Capitolo 1, creata da Alexandre Duret-Lutz,
- Fig. 10 (tassellazione del piano iperbolico) e Fig. 16 (orosfera) nel Capitolo 1, Fig. 3 (pseudosfera) nel Capitolo 2 e Fig. 3 (tassellazioni del piano iperbolico) nel Capitolo 3, create da Claudio Rocchini,
- Fig. 7-destra (dodecaedro) nel Capitolo 3, creata da DTR.

Lo spazio iperbolico

1. Richiami di geometria riemanniana

1.1. Varietà differenziabili. Una *varietà topologica* di dimensione n è uno spazio topologico M di Hausdorff e paracompatto localmente omeomorfo ad \mathbb{R}^n . In altre parole, esiste un ricoprimento $\{U_i\}$ di M fatto di aperti U_i omeomorfi ad aperti V_i di \mathbb{R}^n .

Le varietà topologiche sono oggetti molto difficili da trattare. La loro definizione è troppo generale e non permette di definire e dimostrare quasi nulla. Anche la stessa nozione di dimensione è non banale: per dimostrare che un aperto di \mathbb{R}^k non è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^h per k e h differenti infatti abbiamo bisogno di strumenti raffinati come l'omologia. Definire e trattare sottospazi topologici in una varietà topologica è difficile: ad esempio, la *sfera di Alexander* mostrata in Fig. 1 è un sottospazio di \mathbb{R}^3 topologicamente omeomorfo ad una sfera. È un oggetto molto complicato che ha molti punti che non sono “lisci” e non possono essere “allisciati” in nessun modo.

Per definire oggetti più trattabili e “lisci” si fa generalmente ricorso ai potenti strumenti del calcolo infinitesimale in più variabili. A questo scopo si definiscono

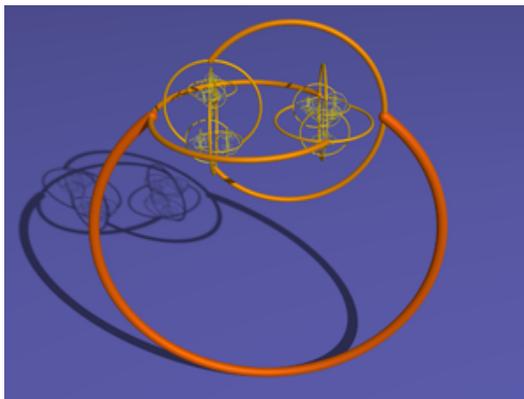


FIGURA 1. La *sfera cornuta di Alexander* è un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 omeomorfo alla sfera S^2 . Divide lo spazio \mathbb{R}^3 in due componenti connesse, nessuna delle quali è omeomorfa ad un disco aperto. È stato costruito da Alexander come controesempio ad una naturale generalizzazione del teorema della curva di Jordan in dimensione 3. La naturale generalizzazione sarebbe la seguente: è vero che ogni sfera in \mathbb{R}^3 è il bordo di una palla? Se la sfera è intesa solo come sottovarietà topologica, la risposta è negativa e la sfera di Alexander è un controesempio. Se invece la sfera è intesa come sottovarietà differenziabile la risposta è positiva, come dimostrato dallo stesso Alexander.

le nozioni di *carta* e *atlante*.

DEFINIZIONE 1.1. Sia M una varietà topologica. Una *carta* è un fissato omeomorfismo $\varphi: U_i \rightarrow V_i$ fra un aperto U_i di M ed un aperto V_i di \mathbb{R}^n . Un *atlante* è un insieme di carte $\{(U_i, \varphi_i)\}$ tale che gli aperti U_i ricoprono M . Un *atlante differenziabile* è un atlante in cui le *funzioni di transizione* $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, ove definite, sono lisce.¹

DEFINIZIONE 1.2. Una *varietà differenziabile* è una varietà topologica dotata di un atlante differenziabile.

OSSERVAZIONE 1.3. Molti atlanti diversi su M definiscono in realtà lo stesso oggetto. È possibile dare una definizione che non dipenda dalla particolare scelta dell'atlante. Si definiscono due atlanti *compatibili* se la loro unione è anch'essa un atlante differenziabile. La struttura differenziale di M è quindi identificata dall'atlante compatibile *massimale*, cioè quello che contiene tutti gli atlanti compatibili.

Abbiamo definito gli oggetti, passiamo come sempre a definire degli opportuni morfismi fra gli oggetti.

DEFINIZIONE 1.4. Una funzione $f: M \rightarrow N$ fra varietà differenziabili è *liscia* se lo è localmente letta tramite le carte.²

Un *diffeomorfismo* è una funzione liscia $f: M \rightarrow N$ che ammette una inversa $g: N \rightarrow M$ liscia.

Una *curva* in M è una funzione liscia $\gamma: I \rightarrow M$ definita su un intervallo I della retta reale (l'intervallo I può coincidere con \mathbb{R} , essere aperto, chiuso, etc.).

DEFINIZIONE 1.5. Una varietà differenziale è *orientata* se è dotata di un atlante in cui tutte le funzioni di transizione preservano l'orientazione di \mathbb{R}^n , cioè se il determinante del loro differenziale in ogni punto è positivo.

Non tutte le varietà possono essere orientate.

1.2. Spazio tangente. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n . È possibile definire per ogni punto $p \in M$ uno spazio vettoriale n -dimensionale $T_p M$ detto *spazio tangente*.

Lo spazio T_p può essere definito brevemente come l'insieme delle curve $\gamma:]-a, a[\rightarrow M$ tali che $\gamma(0) = p$ con $a > 0$ qualsiasi, viste a meno di una relazione di equivalenza. La relazione è la seguente: si identificano due curve che, lette in una carta (U_i, φ_i) , abbiano la stessa tangente nel punto $\varphi_i(p)$. La definizione non dipende dalla carta scelta.

Una carta identifica $T_p M$ con lo spazio tangente al punto $\varphi_i(p)$ nell'aperto $V_i = \varphi_i(U_i)$, cioè con \mathbb{R}^n stesso. Due carte diverse φ_i e φ_j danno due identificazioni differenti, ma la relazione fra queste è un isomorfismo di spazi vettoriali, dato dal

¹Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ allora la funzione di transizione φ_{ji} è l'omeomorfismo fra gli aperti $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ e $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ di \mathbb{R}^n definito come $\varphi_{ji} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j} \circ (\varphi_i|_{U_i \cap U_j})^{-1}$. Questa mappa deve essere liscia (cioè C^∞): questa richiesta ha senso perché dominio e codominio sono aperti di \mathbb{R}^n .

²Per ogni $p \in M$ devono esistere due carte (U_i, φ_i) di M e (U'_j, φ'_j) di N contenenti rispettivamente p e $f(p)$ tali che la composizione $\varphi'_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ sia una funzione liscia da $\varphi_i(U_i)$ in $\varphi'_j(U'_j)$. Le varietà M e N possono avere dimensioni differenti.

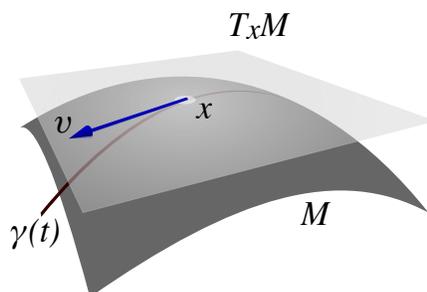


FIGURA 2. Lo spazio tangente in p può essere definito come l'insieme delle curve γ con $\gamma(0) = p$ viste a meno di una relazione di equivalenza, che identifica due curve che hanno (in qualche carta) la stessa tangente in p . Questa condizione è vera in una carta se e solo se è vera in tutte le carte.

differenziale (invertibile) di φ_{ji} . La struttura di spazio vettoriale su T_p è quindi ben definita.

Ogni mappa liscia $f: M \rightarrow N$ fra varietà differenziabili induce in ogni punto $p \in M$ una mappa lineare $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ fra spazi tangenti nel modo seguente: la curva γ viene mandata nella curva $f \circ \gamma$.

DEFINIZIONE 1.6. Una mappa $f: M \rightarrow N$ è un *diffeomorfismo locale* in un punto $p \in M$ se esistono due aperti $U \subset M$ e $V \subset N$ contenenti rispettivamente p e $f(p)$ tale che $f|_U: U \rightarrow V$ sia un diffeomorfismo.

Il teorema di invertibilità locale per aperti di \mathbb{R}^n implica facilmente il risultato seguente, che mostra l'importanza degli spazi tangenti.

TEOREMA 1.7. Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa liscia fra varietà della stessa dimensione. La mappa è un diffeomorfismo locale in $p \in M$ se e solo se il differenziale $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ è invertibile.

Nell'enunciato, una condizione puntuale (differenziabile invertibile in un punto) implica una condizione locale (diffeomorfismo). Vedremo più avanti che in geometria riemanniana una condizione puntuale può anche implicare una condizione globale.

Se $\gamma: I \rightarrow M$ è una curva, la sua *velocità* $\gamma'(t)$ in $t \in I$ è il vettore tangente $\gamma'(t) = d\gamma_t(1)$. Qui per 1 intendiamo il vettore 1 nello spazio tangente \mathbb{R} a p in I . Notiamo che la velocità è un vettore ma non un numero: il modulo di un vettore tangente non è definito in una varietà differenziabile (perché lo spazio tangente è solo uno spazio vettoriale reale, non ha una norma).

1.3. Fibrato tangente. L'unione degli spazi tangenti T_p al variare di $p \in M$ è essa stessa in modo naturale una varietà differenziabile di dimensione doppia $2n$, detta *fibrato tangente*. Questa varietà è indicata con il simbolo TM . Un atlante per M induce infatti un atlante per TM . Come abbiamo visto, una carta (U_i, φ_i) per M identifica $\cup_{p \in U_i} T_p$ con l'aperto $\varphi(U_i) \times \mathbb{R}^n$ di \mathbb{R}^{2n} . Si può quindi dare una topologia a TM in modo che $\cup_{p \in U_i} T_p$ siano aperti e queste identificazioni siano carte. Le funzioni di transizione sono automaticamente differenziabili.

Ogni mappa liscia $f: M \rightarrow N$ fra varietà differenziabili induce in ogni punto $p \in M$ una mappa lineare $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ fra spazi tangenti (e quindi globalmente una mappa differenziabile $f_*: TM \rightarrow TN$ fra fibrati tangenti).

OSSERVAZIONE 1.8. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n . Una *sottovarietà differenziabile* di dimensione k in M è un sottoinsieme connesso N che può essere definito localmente come luogo di zeri di funzioni a valori in \mathbb{R}^{n-k} con differenziale ovunque surgettivo.³ Teoremi di topologia differenziale garantiscono che un tale sottoinsieme abbia una naturale struttura di varietà differenziabile (di dimensione più bassa). Per ogni $p \in N$ lo spazio tangente T_pN è in modo naturale un sottospazio di T_pM e l'intero fibrato TN è una sottovarietà di TM .

1.4. Tensore metrico. In una varietà differenziabile è definito uno spazio tangente in ogni punto. Non sono però definite le nozioni di distanza fra punti, di volume, di angolo fra vettori, di lunghezza di un vettore. Ad esempio la velocità di una curva è un vettore tangente il cui modulo non è però definito. Per ottenere queste (ed altre) nozioni geometriche è sufficiente introdurre un solo oggetto, il tensore metrico.

Un *tensore metrico* per M è il dato di un prodotto scalare su ogni spazio tangente T_p di M , che vari in modo liscio al variare di p in M .⁴

DEFINIZIONE 1.9. Una *varietà riemanniana* è una varietà differenziabile dotata di un tensore metrico che sia definito positivo su ogni spazio tangente. Generalmente si indica come coppia (M, g) , dove M è la varietà e g il tensore.

Consideriamo subito due esempi fondamentali.

ESEMPIO 1.10. Lo *spazio euclideo* è la varietà \mathbb{R}^n dotata del tensore metrico euclideo $g(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ su ogni spazio tangente $T_p = \mathbb{R}^n$.

ESEMPIO 1.11. Ogni sottovarietà differenziabile N di una varietà riemanniana M è essa stessa riemanniana: è sufficiente restringere il tensore metrico di M su N .

In particolare, la *sfera*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

è una sottovarietà di \mathbb{R}^{n+1} e in quanto tale ha una struttura di varietà riemanniana.

Il tensore metrico g definisce in particolare una norma per ogni vettore tangente, ed un angolo fra vettori tangenti nello stesso punto. La velocità $\gamma'(t)$ di una curva ha quindi un modulo $|\gamma'(t)| \geq 0$ ben definito, e due curve che si incontrano in un punto con velocità non nulle formano un angolo ben definito. La lunghezza di una curva $\gamma: I \rightarrow M$ può essere definita come

$$L(\gamma) = \int_I |\gamma'(t)| dt$$

e può essere finita o infinita.

³Oppure possono essere definite localmente come immagini di funzioni con dominio un aperto di \mathbb{R}^k e differenziale ovunque iniettivo. Le due definizioni sono equivalenti e (per fortuna) sono entrambe molto semplici.

⁴Su ogni carta il prodotto scalare è esprimibile come una matrice i cui coefficienti devono variare in modo liscio con il punto.

1.5. Quello che un tensore metrico può fare per voi. Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa. Le curve possono essere usate per definire una *distanza* su M .

Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ *parte* in $\gamma(a)$ e *arriva* in $\gamma(b)$. Una curva che collega due punti $p, q \in M$ è una qualsiasi curva che parta in p e arrivi in q .

DEFINIZIONE 1.12. La distanza $d(p, q)$ fra due punti p e q è definita come

$$d(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma)$$

al variare fra le curve γ che collegano p e q .

La varietà M dotata della distanza d è uno spazio metrico (che induce su M la stessa topologia di M).

DEFINIZIONE 1.13. Una *geodetica* è una curva $\gamma: I \rightarrow M$ con velocità costante (in modulo) che realizza localmente le distanze.⁵

Nota che con questa definizione la curva costante $\gamma(t) = p_0$ è una geodetica avente velocità costante zero. Chiameremo queste geodetiche *banali*. Una curva che realizza localmente le distanze può non realizzarle globalmente.

ESEMPIO 1.14. Le geodetiche non banali nello spazio euclideo \mathbb{R}^n sono rette affini percorse a velocità costante.

Le geodetiche non banali nella sfera S^n sono archi di cerchi massimi, percorsi a velocità costante.

Se la varietà differenziabile M è orientata, il tensore metrico induce anche una *forma volume*.

Brevemente, il modo migliore di definire una nozione di volume in una varietà M consiste nel definire una opportuna *n-forma differenziale*, dove n è la dimensione di M . Formalmente, una *n-forma differenziale* ω è il dato in ogni spazio tangente T_p di una forma multilineare alternante

$$\omega_p : \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_n \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'aggettivo *alternante* indica che se vengono scambiati due vettori nel dominio il risultato cambia di segno. A meno di riscalamento esiste un solo ω_p che soddisfa questo criterio (identificando T_p con \mathbb{R}^n , questo non è altro che il determinante). La forma ω_p ovviamente deve cambiare in modo liscio con p .

Le *n*-forme sono utili perché possono essere integrate: in altre parole ha senso la scrittura

$$\int_D \omega$$

su un qualsiasi aperto D . Una *forma volume* in una varietà orientata è una forma ω tale che $\omega_p(v_1, \dots, v_n) > 0$ su ogni base positiva v_1, \dots, v_n di T_p e per ogni $p \in M$.⁶

Il tensore metrico definisce una forma volume nel modo seguente: basta imporre che $\omega_p(e_1, \dots, e_n) = 1$ per ogni base ortonormale positiva e_1, \dots, e_n . Con questa

⁵Il modulo $k = |\gamma'(t)|$ non deve dipendere da t , e per ogni $t_0 \in I$ deve esistere $\epsilon > 0$ tale che $d(\gamma(t), \gamma(t')) = L(\gamma|_{[t, t']}) = k|t - t'|$ per ogni $t, t' \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$.

⁶L'orientazione su M divide le basi per T_p in positive e negative, per ogni punto $p \in M$.

definizione, ogni aperto D di M ha un ben definito *volume*

$$\text{Vol}(D) = \int_D \omega$$

che è un numero reale positivo oppure infinito. Se D è relativamente compatto il volume è necessariamente finito. In particolare, una varietà riemanniana compatta M ha un volume $\text{Vol}(M)$ finito.

1.6. Mappa esponenziale. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Una geodetica $\gamma : I \rightarrow M$ è *massimale* se non può essere estesa ad una geodetica con dominio J strettamente più grande di I . Le geodetiche massimali sono determinate da condizioni al primo ordine:

TEOREMA 1.15. *Siano $p \in M$ un punto e $v \in T_p M$ un vettore tangente. Esiste un'unica geodetica massimale $\gamma : I \rightarrow M$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. L'intervallo I è un aperto contenente 0.*

Questo importante risultato ha numerose applicazioni. Ad esempio, permette di definire il concetto seguente.

DEFINIZIONE 1.16. Sia $p \in M$ un punto. La *mappa esponenziale* in p è la mappa

$$\exp_p : U_p \rightarrow M$$

definita su un sottoinsieme $U_p \subset T_p$ contenente l'origine nel modo seguente.

Un vettore $v \in T_p$ determina una geodetica massimale $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ tale che $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$. Sia U l'insieme dei vettori v per cui $1 \in I_v$. Per questi vettori v definiamo $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$.

TEOREMA 1.17. *L'insieme U_p è un aperto contenente l'origine. Il differenziale della mappa esponenziale \exp_p nell'origine è l'identità e quindi \exp_p è un diffeomorfismo locale nell'origine.*

In questo modo un aperto dello spazio tangente T_p può essere usato come carta locale intorno a p . Recuperiamo quindi l'idea intuitiva che lo spazio tangente approssimi localmente la varietà al primo ordine.

1.7. Raggio di iniettività. Il massimo raggio su cui la mappa esponenziale sia un diffeomorfismo è chiamato *raggio di iniettività*.

DEFINIZIONE 1.18. Il *raggio di iniettività* $\text{inj}_p M$ di M in un punto p è definito nel modo seguente:

$$\text{inj}_p M = \sup \{ r > 0 \mid \exp_p|_{B_0(r)} \text{ è un diffeomorfismo sull'immagine} \}.$$

Qui $B_0(r)$ è la palla aperta di centro 0 e raggio r nello spazio tangente T_p . Il raggio di iniettività è sempre positivo per il Teorema 1.17. Per ogni r minore del raggio di iniettività la mappa esponenziale trasforma la palla di raggio r in T_p nella palla di raggio r in M . Vale cioè l'uguaglianza

$$\exp_p(B_0(r)) = B_p(r)$$

e la palla $B_p(r)$ è effettivamente diffeomorfa ad una palla aperta in \mathbb{R}^n . Per r grande questo fatto ovviamente può non essere vero: se M è compatta ad esempio esiste un $R > 0$ tale che $B_p(R) = M$.

Il raggio di iniettività $\text{inj}(M)$ di una varietà riemanniana M è

$$\text{inj}(M) = \inf_{x \in M} \text{inj}_x M.$$

Il fatto seguente si dimostra facilmente.

PROPOSIZIONE 1.19. *Una varietà riemanniana compatta ha raggio di iniettività positivo.*

Notiamo infine il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 1.20. *Sia M una varietà riemanniana. Una curva chiusa di lunghezza minore di $2 \cdot \text{inj}(M)$ è omotopicamente banale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia x un punto qualsiasi attraversato dalla curva. Poiché la curva è più corta di $2 \cdot \text{inj}(M)$ non riesce ad uscire dalla palla $B_x(r)$ per qualche $r < \text{inj}(M) \leq \text{inj}_x M$, e questa palla è effettivamente diffeomorfa ad una palla in \mathbb{R}^n . Quindi la curva è contenuta in un sottoinsieme contrattile di M ed è omotopicamente banale. \square

1.8. Completezza. Una varietà riemanniana (M, g) è anche uno spazio metrico, che può essere completo oppure no. Ad esempio, una varietà riemanniana compatta è sempre completa. D'altra parte, rimuovendo un punto da una varietà riemanniana qualsiasi si ottiene sempre uno spazio non completo. Su \mathbb{R}^n è possibile assegnare strutture riemanniane complete (ad esempio quella euclidea) e non complete (il disco aperto in \mathbb{R}^n è diffeomorfo a \mathbb{R}^n ma la sua metrica indotta non è completa).

La completezza di una varietà riemanniana può essere espressa in vari modi equivalenti:

TEOREMA 1.21 (Hopf-Rinow). *Sia (M, g) varietà riemanniana connessa. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

- (1) M è completa,
- (2) un sottoinsieme di M è compatto se e solo se è chiuso e limitato,
- (3) ogni geodetica è estendibile su tutto \mathbb{R} .

In particolare, l'ultima condizione è equivalente al fatto che la mappa esponenziale sia definita su tutto lo spazio tangente T_p , per ogni p (e non solo su un suo aperto proprio).

1.9. Curvatura. La *curvatura* di una varietà riemanniana (M, g) è un oggetto complicato, generalmente definito a partire da una *connessione* ∇ detta *connessione di Levi-Civita*. Questa definisce a sua volta un tensore detto *tensore di Riemann* che codifica la curvatura di M nel modo più ampio.

Non introduciamo questi concetti perché sono troppo raffinati per gli spazi che incontreremo: in geometria iperbolica infatti le varietà avranno tutte “curvatura costante” ed il tensore di Riemann non è necessario. Ci basterà introdurre in modo geometrico la nozione di *curvatura sezionale*.

Se M ha dimensione 2, cioè è una superficie, le nozioni di curvatura si semplificano e si riducono tutte ad un unico concetto chiamato *curvatura gaussiana*. Se M è contenuta in \mathbb{R}^3 la curvatura gaussiana è definita come il prodotto delle due curvatures principali. Se M è astratta però non esiste nessuna nozione di curvatura principale e si prende quindi un'altra strada. Esistono vari modi equivalenti

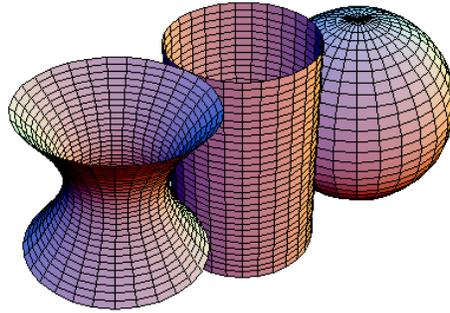


FIGURA 3. Tre superfici nello spazio (iperboloide ad una falda, cilindro, sfera) con curvatura gaussiana rispettivamente negativa, nulla e positiva in ogni punto. Mentre la sfera ha curvatura positiva costante, l'iperboloide ad una falda ha curvatura negativa variabile. Come vedremo, non è possibile costruire una superficie in \mathbb{R}^3 completa con curvatura negativa costante.

di definire la curvatura gaussiana di una superficie astratta, scegliamo uno dei più geometrici.

Abbiamo visto nella sezione precedente che in una varietà riemanniana (M, g) , per ogni punto $p \in M$ esiste un $\epsilon > 0$ tale che la palla $B_p(\epsilon)$ centrata in p di raggio ϵ sia effettivamente diffeomorfa alla palla usuale in \mathbb{R}^n .

Il volume di questa palla $B_p(\epsilon)$ non è però necessariamente uguale al volume di una palla euclidea: può essere più grande o più piccolo, e questa discrepanza è una misura della curvatura della varietà.

DEFINIZIONE 1.22. Sia (M, g) una superficie. La *curvatura gaussiana* in un punto p è definita come

$$K = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left((\pi\epsilon^2 - \text{Vol}(B_p(\epsilon))) \cdot \frac{12}{\pi\epsilon^4} \right).$$

In altre parole, vale la formula

$$\text{Vol}(B_p(\epsilon)) = \pi\epsilon^2 - \frac{\pi\epsilon^4}{12}K + o(\epsilon^4).$$

Notiamo in particolare che K è positivo (negativo) se $B_p(\epsilon)$ ha area più piccola (più grande) di quella usuale euclidea.

Se (M, g) ha dimensione $n \geq 3$ è ancora possibile definire una curvatura valutando la differenza fra $\text{Vol}(B_p(\epsilon))$ e il volume di una palla euclidea n -dimensionale come per la curvatura gaussiana. Si ottiene un valore numerico detto *curvatura scalare*. La curvatura scalare in una varietà di dimensione $n \geq 3$ è però una descrizione molto scarna della curvatura in un punto, e si preferisce quindi generalmente utilizzare una definizione di curvatura che fornisca molte più informazioni. La curvatura di (M, g) è generalmente modellizzata da uno dei seguenti due oggetti: il *tensore di Riemann* oppure la *curvatura sezionale*. Questi due oggetti sono abbastanza diversi ma contengono la stessa quantità di informazioni. Introduciamo qui la curvatura sezionale.

DEFINIZIONE 1.23. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Sia $p \in M$ un punto e $W \subset T_pM$ un piano vettoriale. Per il Teorema 1.17 esiste un aperto $U_p \subset T_pM$ contenente l'origine su cui \exp_p è un diffeomorfismo sull'immagine. In particolare

$S = \exp_p(U_p \cap W)$ è una piccola superficie liscia in M passante per p . Come sottovarietà liscia S ha una struttura riemanniana indotta da g .

La *curvatura sezionale* di (M, g) lungo (p, W) è definita come la curvatura gaussiana di S nel punto p .

La curvatura sezionale è quindi un numero associato ad ogni punto $p \in M$ e ad ogni piano $W \subset T_p M$.

DEFINIZIONE 1.24. Una varietà riemanniana (M, g) ha *curvatura sezionale costante* K se la curvatura sezionale associata ad ogni punto $p \in M$ e qualsiasi piano $W \subset T_p M$ è sempre pari a K .

OSSERVAZIONE 1.25. In una varietà riemanniana (M, g) è possibile *riscaldare* la metrica di un fattore $\lambda > 0$ sostituendo g con il tensore λg . In ogni punto il prodotto scalare è riscalato di λ . Le lunghezze delle curve vengono riscalate di $\sqrt{\lambda}$ ed i volumi vengono riscalati di $\lambda^{\frac{n}{2}}$. La curvatura sezionale viene riscalata di $1/\lambda$.

Riscalando la metrica è quindi possibile trasformare uno spazio a curvatura sezionale costante K in uno spazio a curvatura sezionale costante $-1, 0$ oppure 1 .

ESEMPIO 1.26. Lo spazio euclideo \mathbb{R}^n ha curvatura costante zero. Una sfera di raggio R ha curvatura costante $1/R^2$.

1.10. Isometrie. Ogni categoria che si rispetti ha i suoi isomorfismi. Gli isomorfismi delle varietà riemanniane si chiamano *isometrie*.

DEFINIZIONE 1.27. Un diffeomorfismo $f: M \rightarrow N$ fra due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) è una *isometria* se preserva il prodotto scalare. Deve cioè valere

$$\langle v, w \rangle = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle$$

per ogni $p \in M$ e per ogni coppia di vettori $v, w \in T_p M$. I simboli \langle, \rangle indicano i prodotti scalari in T_x e $T_{f(x)}$.

Le isometrie sono estremamente rigide. Sono infatti determinate dal comportamento puntuale al primo ordine. In altre parole, due isometrie che coincidono al primo ordine in un punto coincidono ovunque:

TEOREMA 1.28. *Siano f, g due isometrie fra varietà riemanniane M e N connesse. Se esiste un punto $p \in M$ tale che $f(p) = g(p)$ e $df_p = dg_p$, allora $f = g$.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che l'insieme $S \subset M$ dei punti p tali che $f(p) = g(p)$ e $df_p = dg_p$ è aperto e chiuso.

I luoghi di coincidenza fra funzioni continue sono generalmente chiusi, e lo si verifica facilmente anche in questo contesto (basta usare una carta). Per dimostrare che S è aperto si usa la mappa esponenziale. Sia $p \in S$. Per il Teorema 1.17 esiste un intorno aperto $U_p \subset T_p M$ dell'origine su cui la mappa esponenziale è un diffeomorfismo sull'immagine. Mostriamo che l'aperto $\exp(U_p)$ è interamente contenuto in S .

Sia $v \in U_p$ un vettore. Per definizione di mappa esponenziale, questo determina una geodetica γ in M tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ e $\gamma(1) = \exp(v)$. Le isometrie f e g hanno lo stesso differenziale in p e quindi mandano v nello stesso vettore $w = df_p(v) = dg_p(v) \in T_{f(p)} N$. Le isometrie preservano tutta la struttura riemanniana, ed in particolare mandano geodetiche in geodetiche. Quindi $f \circ \gamma$ e $g \circ \gamma$ sono

entrambe geodetiche uscenti da $f(p)$ con la stessa velocità iniziale w . Per il Teorema 1.15 le geodetiche coincidono. Quindi $f(\exp(1)) = g(\exp(1))$. Il vettore v è un qualsiasi vettore in U_p e quindi f e g coincidono su tutto l'aperto immagine $\exp(U_p)$. \square

Le isometrie $f: M \rightarrow M$ di una varietà M in sé formano un gruppo che indichiamo con il simbolo $\text{Isom}(M)$.

2. I modelli dello spazio iperbolico

In ogni dimensione $n \geq 2$ esiste un'unica varietà riemanniana completa, semplicemente connessa, e con curvatura sezionale costante 1, 0 oppure -1 a meno di isometrie. Queste tre varietà sono estremamente importanti in geometria riemanniana perché sono il modello fondamentale con cui costruire e studiare le varietà a curvatura costante non semplicemente connesse.

Le tre varietà sono rispettivamente la *sfera* S^n , lo *spazio euclideo* \mathbb{R}^n e lo *spazio iperbolico* \mathbb{H}^n . Come vedremo, ogni varietà completa a curvatura costante ha uno di questi tre spazi come rivestimento universale.

A differenza di S^n e \mathbb{R}^n , lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n può essere definito in vari modi equivalenti, nessuno dei quali è prevalente in letteratura. Ciascuno di questi modi equivalenti è un *modello* per \mathbb{H}^n .

2.1. Iperboloide. La sfera S^n è il luogo dei punti di norma 1 in \mathbb{R}^{n+1} , considerato con l'usuale prodotto scalare (e quindi norma) euclideo. Analogamente, possiamo definire \mathbb{H}^n come il luogo dei punti di norma -1 in \mathbb{R}^{n+1} , dotato dell'usuale prodotto scalare *lorentziano*. Questo luogo dei punti ha in realtà due componenti connesse e ne sceglieremo una.

DEFINIZIONE 2.1. Consideriamo \mathbb{R}^{n+1} dotato del prodotto scalare lorentziano standard di segnatura $(n, 1)$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}.$$

Un vettore $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ è di tipo *tempo*, *luce* o *spazio* a seconda che $\langle x, x \rangle$ sia negativo, nullo o positivo.

Il *modello dell'iperboloide* I^n è definito nel modo seguente:

$$I^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_n > 0\}.$$

L'insieme dei punti x con $\langle x, x \rangle = -1$ è un *iperboloide a due falde*, e l'insieme I^n è la componente connessa (falda) con $x_{n+1} > 0$. Mostriamo innanzitutto un fatto generale.

PROPOSIZIONE 2.2. Sia \langle, \rangle un prodotto scalare qualsiasi su \mathbb{R}^n . La funzione

$$f(x) = \langle x, x \rangle$$

è liscia in ogni punto e ha differenziale

$$df_x(y) = 2\langle x, y \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE. Vale

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

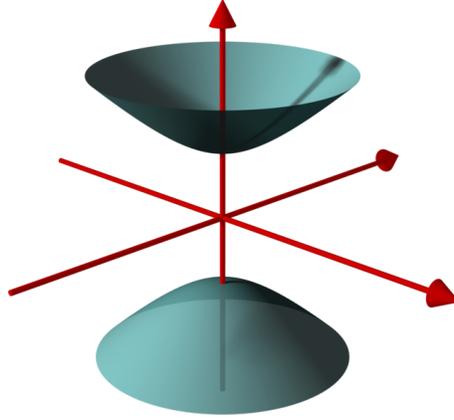


FIGURA 4. L'iperboloide a due falde definito dall'equazione $\langle x, x \rangle = -1$. Il modello I^n è la componente connessa superiore.

La componente $\langle x, y \rangle$ è lineare in y e si verifica facilmente che $\langle y, y \rangle \in o(\|y\|)$, dove $\|y\|$ è l'usuale norma euclidea. \square

COROLLARIO 2.3. *L'iperboloide I^n è una varietà riemanniana.*

DIMOSTRAZIONE. La funzione $f(x) = \langle x, x \rangle$ ha differenziale $2\langle x, y \rangle$. Poiché I^n è il luogo dei punti in cui $\langle x, x \rangle = -1$, per ogni $x \in I^n$ il differenziale $y \mapsto 2\langle x, y \rangle$ è surgettivo. Segue che il luogo degli zeri di $f(x) + 1$ è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^{n+1} di codimensione uno.

Lo spazio tangente $T_x I^n$ in x a I^n è precisamente il nucleo del differenziale, e cioè l'iperpiano

$$T_x = \{y \mid \langle x, y \rangle = 0\} = x^\perp$$

ortogonale a x secondo il prodotto scalare lorentziano. Poiché x è di tipo tempo, la restrizione del prodotto scalare a x^\perp ha segnatura $(n, 0)$. Quindi il prodotto scalare ristretto al tangente di I^n è definito positivo e I^n ha quindi una struttura di varietà riemanniana. \square

L'iperboloide I^n è uno dei modelli per lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n . Vedremo successivamente che è effettivamente semplicemente connesso, completo, e che ha curvatura costante -1 .

2.2. Isometrie dell'iperboloide. Le isometrie di I^n sono classificate agevolmente con gli strumenti dell'algebra lineare.

DEFINIZIONE 2.4. Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Una *isometria* di V è un isomorfismo $f: V \rightarrow V$ tale che $\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$ per ogni coppia $v, w \in V$. Le isometrie formano un gruppo detto *gruppo ortogonale* che indichiamo con $O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Se $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard di segnatura $(k, n - k)$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^k x_i y_i - \sum_{j=k+1}^n x_j y_j$$

allora indichiamo il gruppo ortogonale direttamente con il simbolo $O(k, n - k)$. Identificando gli endomorfismi di \mathbb{R}^n con le matrici $n \times n$, questo gruppo può essere visto come un gruppo moltiplicativo di matrici, sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$.

In particolare $O(n, 1)$ è il gruppo delle isometrie di \mathbb{R}^{n+1} con il prodotto scalare lorentziano che stiamo considerando. Una isometria preserva il prodotto scalare, e quindi manda l'iperboloide a due falde definito dalla condizione $\langle x, x \rangle = -1$ in sé stesso. Indichiamo con $O_*(n, 1)$ il sottogruppo di indice due in $O(n, 1)$ formato da quelle isometrie che preservano (non scambiano) le due falde dell'iperboloide. In altre parole, è il sottogruppo delle matrici $A \in O(n, 1)$ tali che $A_{n+1, n+1} > 0$. Il gruppo $O_*(n, 1)$ agisce quindi su I^n .

Indichiamo sempre con $\text{Isom}(M)$ il gruppo di isometrie di una varietà riemanniana M .

PROPOSIZIONE 2.5. *Vale l'uguaglianza*

$$\text{Isom}(I^n) = O_*(n, 1).$$

DIMOSTRAZIONE. Una isometria $A \in O_*(n, 1)$ preserva il prodotto scalare lorentziano e in particolare preserva il prodotto scalare riemanniano (definito positivo) sugli spazi tangenti a I^n . Quindi è una isometria della varietà riemanniana I^n .

D'altra parte, sia f una isometria di I^n . Dobbiamo mostrare che $f \in O_*(n, 1)$. Consideriamo il punto $P = (0, \dots, 0, 1) \in I^n$. Abbiamo $f(P) = Q$ per qualche $Q \in I^n$. Con facili argomenti di algebra lineare si mostra che esiste una isometria $A \in O_*(n, 1)$ tale che $A(Q) = P$. A meno di comporre f con A possiamo quindi supporre che f fissi il punto P .

Il piano tangente T_P a P è l'iperpiano orizzontale $x_{n+1} = 0$. Il differenziale df_P è quindi rappresentabile come una matrice ortogonale $B \in O(n)$. Sia B' la matrice a blocchi

$$B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è un elemento di $O_*(n, 1)$. Definisce quindi una isometria di I^n che coincide con f fino al primo ordine in P . Per il Teorema 1.28 le due isometrie f e B' di I^n coincidono su tutta la varietà I^n , in altre parole $f = B'$. \square

Mostriamo per completezza due risultati analoghi per S^n e \mathbb{R}^n :

PROPOSIZIONE 2.6. *Valgono le uguaglianze*

$$\text{Isom}(S^n) = O(n + 1),$$

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Le dimostrazioni sono analoghe alla proposizione precedente. I gruppi a destra delle uguaglianze sono chiaramente isometrie. Per mostrare che non ci sono altre isometrie oltre a queste, si mostra che una qualsiasi isometria deve coincidere al primo ordine in un (qualsiasi) punto con una di queste. \square

Abbiamo anche dimostrato il fatto seguente. Un *sistema di riferimento* in un punto p di una varietà riemanniana è il dato di una base ortonormale in T_p .

COROLLARIO 2.7. *Sia $M = S^n, \mathbb{R}^n$, oppure I^n . Dati due punti $p, q \in M$ e due sistemi di riferimento in p e q , esiste un'unica isometria che trasforma il primo sistema di riferimento nel secondo.*

Ovviamente il sistema di riferimento viene trasformato tramite il differenziale dell'isometria. Il corollario dice che gli spazi S^n , \mathbb{R}^n e I^n hanno il “massimo numero” di isometrie possibili.

2.3. Sottospazi. Ciascuno dei tre spazi S^n , \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n contiene degli opportuni *sottospazi* di dimensione k .

DEFINIZIONE 2.8. Un *sottospazio* k -dimensionale di \mathbb{R}^n , S^n , I^n è rispettivamente:

- un sottospazio affine k -dimensionale di \mathbb{R}^n ,
- l'intersezione di un $(k+1)$ -sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1} con S^n ,
- l'intersezione di un $(k+1)$ -sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1} con I^n , quando non è vuota.

A proposito dell'intersezione non vuota, è facile verificare che le condizioni seguenti sono equivalenti per un $(k+1)$ -sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

- (1) $W \cap I^n \neq \emptyset$,
- (2) W contiene dei vettori di tipo tempo,
- (3) la segnatura di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ristretta a W è $(k, 1)$.

Un k -sottospazio in $\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{H}^n$ è a sua volta isometrico a $\mathbb{R}^k, S^k, \mathbb{H}^k$. La intersezione non vuota di due sottospazi è sempre un sottospazio. Una isometria di $\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{H}^n$ manda k -sottospazi in k -sottospazi grazie alle Proposizioni 2.5 e 2.6.

PROPOSIZIONE 2.9. *Dato un k -sottospazio S in S^n, \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n ed un punto $p \in S$, esiste un unico sottospazio ortogonale S^\perp di dimensione $n - k$ passante per p .*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato per S^n e \mathbb{R}^n è facile. Per I^n basta spostare il punto p in $(0, \dots, 0, 1)$ tramite una isometria. A questo punto i sottospazi passanti per p sono in naturale corrispondenza biunivoca con i sottospazi vettoriali di $\{x_{n+1} = 0\}$. \square

Rette e geodetiche sono in realtà la stessa cosa. Ricordiamo le funzioni trigonometriche iperboliche:

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

PROPOSIZIONE 2.10. *Le geodetiche complete non banali in S^n, \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n sono precisamente le rette, percorse a velocità costante. Concretamente, sia $p \in M$ un punto e $v \in T_p M$ un vettore di norma unitaria. La geodetica γ che parte in p con velocità v è la seguente:*

- $\gamma(t) = \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot v$ se $M = S^n$,
- $\gamma(t) = p + tv$ se $M = \mathbb{R}^n$,
- $\gamma(t) = \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot v$ se $M = I^n$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione per \mathbb{R}^n è banale. Per $M = S^n$ o I^n sia $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ generato da p e v . Sia $f \in O(n)$ o $f \in O_*(n, 1)$ l'isometria di \mathbb{R}^{n+1} tale che $f|_W = \text{id}$ e $f|_{W^\perp} = -\text{id}$. Questa induce una isometria di S^n o I^n che fissa p e v . In particolare deve fissare l'unica geodetica γ che parte da p con velocità v . Quindi γ è contenuta in $W \cap I^n$.

L'intersezione $W \cap I^n$ è una circonferenza (se $M = S^n$) o una iperbole (se $M = I^n$), che γ percorre a velocità costante unitaria: quindi γ è come nell'enunciato. La

velocità è infatti

$$\gamma'(t) = \cosh'(t) \cdot p + \sinh'(t) \cdot v = \sinh(t) \cdot p + \cosh(t) \cdot v$$

che ha norma quadra $\sinh^2(t) - \cosh^2(t) = 1$. \square

COROLLARIO 2.11. *Gli spazi S^n , \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n sono completi.*

DIMOSTRAZIONE. La proposizione precedente mostra che tutte le geodetiche sono definite su tutto \mathbb{R} , e quindi lo spazio è completo per il teorema di Hopf-Rinow. \square

Infine, è facile mostrare che per due punti distinti in \mathbb{H}^n passa una sola retta.

OSSERVAZIONE 2.12. Il V postulato di Euclide ovviamente vale solo in \mathbb{R}^2 : data una retta r e un punto P non contenuto in r , esiste una sola retta per P disgiunta da r (in \mathbb{R}^2), non ne esiste nessuna (in S^2) o ne esistono infinite (in \mathbb{H}^2).

2.4. Riflessioni. Dimostriamo in questa sezione un importante teorema di algebra lineare. Per fare ciò introduciamo le riflessioni parallele a vettori non isotropi.

Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ non degenero di segnatura $(k, n - k)$. Sia $v \in V$ un vettore non isotropo. Otteniamo una decomposizione ortogonale $V = \text{Span}(v) \oplus v^\perp$. Ogni vettore $w \in V$ si decompone in modo unico come $w = w_1 + w_2$ con $w_1 \in \text{Span}(v)$ e $w_2 \in v^\perp$.

DEFINIZIONE 2.13. La *riflessione* parallela a v (e ortogonale all'iperpiano v^\perp) è l'isomorfismo lineare $R_v: w_1 + w_2 \mapsto -w_1 + w_2$ scritto in componenti rispetto alla decomposizione $V = \text{Span}(v) \oplus v^\perp$.

Una riflessione è una isometria rispetto al prodotto scalare di V . Le riflessioni parallele ai vari vettori sono sufficienti a generare tutte le isometrie dello spazio:

PROPOSIZIONE 2.14. *Sia V dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ non degenero. Il gruppo ortogonale $O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è generato da riflessioni.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che una generica isometria $f \in O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è generata da riflessioni, per induzione sulla dimensione di V . Sia $v \in V$ un vettore non isotropo. Supponiamo anche che il vettore $w = f(v) - v$ non sia isotropo (altrimenti basta sostituire f con $-f$). Consideriamo la riflessione R_w parallela a w . Mostriamo che $f(v) = R_w(v)$: possiamo decomporre v come

$$v = \frac{f(v) + v}{2} - \frac{f(v) - v}{2}.$$

Il secondo addendo sta in $\text{Span}(w)$ ed il primo sta in w^\perp perché

$$\langle f(v) + v, f(v) - v \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle - \langle v, v \rangle = 0$$

perché f è una isometria. Quindi effettivamente

$$R_w(v) = \frac{f(v) + v}{2} + \frac{f(v) - v}{2} = f(v).$$

La composizione $R_w^{-1} \circ f$ è una isometria che fissa il vettore non isotropo v . Quindi fissa lo spazio ortogonale v^\perp . Concludiamo per induzione sullo spazio v^\perp di dimensione inferiore. \square

Un sottospazio di codimensione 1 in S^n , \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n è detto *iperpiano*. Una riflessione lungo un iperpiano è una ben definita isometria di \mathbb{R}^n , S^n e \mathbb{H}^n grazie a quanto abbiamo visto fino ad ora.⁷

PROPOSIZIONE 2.15. *I gruppi di isometrie $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, $\text{Isom}(S^n)$ e $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ sono generati da riflessioni lungo iperpiani.*

DIMOSTRAZIONE. Una isometria di \mathbb{R}^n è del tipo $x \mapsto Ax + b$ con $A \in O(n)$ e $b \in \mathbb{R}^n$. La componente rotatoria $A \in O(n)$ è generata da riflessioni per la Proposizione 2.14. Una traslazione $x \mapsto x + b$ è anch'essa facilmente ottenibile come composizione di due riflessioni.

Le isometrie di S^n sono $O(n+1)$ e sono generate da riflessioni lungo iperpiani per la Proposizione 2.14.

Le isometrie di \mathbb{H}^n sono $O_*(n, 1)$. Ogni elemento $f \in O_*(n, 1)$ è composizione di riflessioni $f = R_1 \circ \dots \circ R_k$ per la Proposizione 2.14. Affinché una riflessione $R = R_i$ sia un elemento di $O_*(n, 1)$ è però necessario che non permuti le due falde dell'iperboloide, cioè che R intersechi I^n , cioè che $v = R^\perp$ sia di tipo spazio.

Supponiamo che v sia invece di tipo tempo. Possiamo completare v a base ortogonale $v = v_1, \dots, v_n$ di \mathbb{R}^{n+1} . I vettori successivi v_2, \dots, v_{n+1} sono necessariamente di tipo spazio. Sia r_j la riflessione parallela al vettore v_j . Abbiamo $R = r_1$ e $r_1 \circ \dots \circ r_{n+1} = -\text{id}$. Possiamo quindi sostituire $R = R_i$ con $-r_{n+1} \circ \dots \circ r_2$. Alla fine otteniamo a meno di segno una composizione di riflessioni $f = \pm R_1 \circ \dots \circ R_n$ tutte appartenenti a $O_*(n, 1)$. Il segno ± 1 è necessariamente positivo poiché anche f appartiene a $O_*(n, 1)$. \square

2.5. Mappe conformi e inversioni lungo sfere. Per introdurre due nuovi modelli avremo bisogno di un paio di nozioni geometriche importanti.

Una mappa $f: M \rightarrow N$ fra varietà riemanniane è una *mappa conforme* se per ogni $p \in M$ esiste un $\lambda_p > 0$ tale che

$$\langle df_p(v), df_p(w) \rangle = \lambda_p \langle v, w \rangle$$

per ogni $v, w \in T_p M$. Una mappa conforme non preserva le lunghezze dei vettori tangenti ma preserva tutti gli angoli fra questi.

OSSERVAZIONE 2.16. È possibile dimostrare che un diffeomorfismo $f: M \rightarrow N$ fra varietà riemanniane è conforme se e solo se preserva tutti gli angoli in ogni punto. Per questo una mappa conforme è spesso definita in modo equivalente come un diffeomorfismo che preserva gli angoli.

Abbiamo definito precedentemente i k -sottospazi in S^n , \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n , passiamo a definire le k -sfere. Una *ipersfera* (o $(n-1)$ -sfera) in S^n , \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n è il bordo $\partial B_p(r)$ di una palla centrata in un punto avente raggio r minore del raggio di iniettività inj_p in p (questa nozione è valida in ogni varietà riemanniana). Notiamo che il raggio di iniettività in un punto di S^n è π , quindi abbiamo $r < \pi$, mentre il raggio di iniettività di un punto in \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n è infinito.

DEFINIZIONE 2.17. Una k -sfera in S^n , \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n è l'intersezione fra una ipersfera e un $(k+1)$ -piano passante per il suo centro.

⁷Se l'iperpiano è in S^n o I^n , questo è per definizione intersezione di S^n o I^n con un iperpiano di \mathbb{R}^{n+1} dotato di prodotto scalare con segnatura $(n+1, 0)$ o $(n, 1)$. Una riflessione lungo questo iperpiano di \mathbb{R}^{n+1} è un elemento di $O(n)$ oppure $O_*(n, 1)$ e quindi induce una isometria su S^n o I^n .

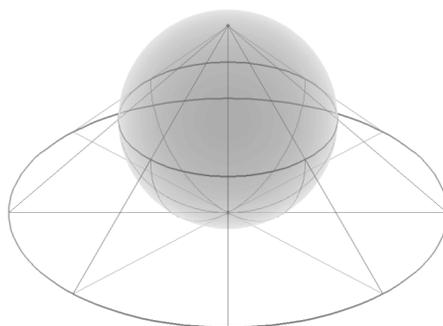


FIGURA 5. La proiezione stereografica della sfera meno un punto su un piano tangente.

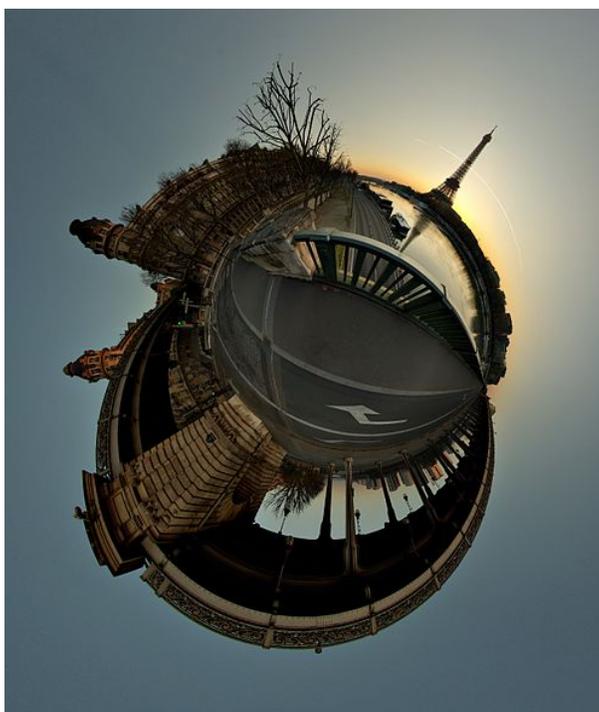


FIGURA 6. La proiezione stereografica è una mappa conforme. La foto mostra la proiezione stereografica planare della vista (sferica) che si ottiene in un punto a Parigi. Le linee rette sono trasformate in cerchi, ma gli angoli fra questi sono preservati. Figura creata da Alexandre Duret-Lutz.

La *proiezione stereografica* della sfera S^n meno un punto ∞ sull'iperpiano tangente al punto opposto è la mappa definita come illustrato in Figura 5. Si veda ad esempio la Figura 6.

PROPOSIZIONE 2.18. *La proiezione stereografica*

- (1) è una mappa conforme,
- (2) trasforma le k -sfere di S^n in k -sfere e k -piani di \mathbb{R}^n .

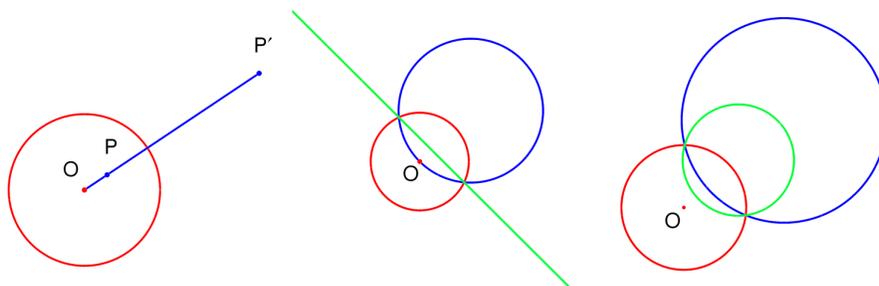


FIGURA 7. L'inversione lungo una sfera di centro O e raggio r sposta P in P' in modo che $OP \times OP' = r^2$ (sinistra) e trasforma una k -sfera S in un k -piano se $O \in S$ (centro) e in una k -sfera se $O \notin S$ (destra). Visto in S^n , l'iperpiano verde centrale è anch'esso una sfera (aggiungendo ∞): vista come trasformazione da S^n in sé l'inversione manda k -sfere in k -sfere.

Tramite proiezione stereografica possiamo scrivere $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ e definire alcune semplici mappe conformi da S^n in sé:

OSSERVAZIONE 2.19. Traslazioni e omotetie sono mappe conformi di \mathbb{R}^n . Si estendono a mappe conformi di S^n ponendo ∞ come punto fisso.

Un'altra mappa conforme è la seguente.

DEFINIZIONE 2.20. Sia $S = S(x_0, r)$ la sfera in \mathbb{R}^n di centro x_0 e raggio r . Consideriamo $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. L'*inversione* lungo S è la mappa $i: S^n \rightarrow S^n$ definita nel modo seguente:

$$i(x) = x_0 + r^2 \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2}$$

ed estesa a tutta la sfera ponendo $f(x_0) = \infty$ e $f(\infty) = x_0$.

Una descrizione geometrica dell'inversione è fornita in Fig. 7.

PROPOSIZIONE 2.21. *Valgono i fatti seguenti.*

- (1) L'*inversione* $i: S^n \rightarrow S^n$ è una mappa liscia e conforme.
- (2) L'*inversione* manda k -sfere in k -sfere.

DIMOSTRAZIONE. A meno di comporre con traslazioni e omotetie (che sono lisce, conformi e preservano k -sfere e k -piani di \mathbb{R}^n) possiamo supporre $x_0 = 0$ e $r = 2$. La mappa letta su \mathbb{R}^n è quindi $i(x) = x/\|x\|^2$. Letta su S^n è semplicemente una riflessione rispetto all'equatore orizzontale. \square

Possiamo interpretare la riflessione rispetto ad un iperpiano affine in \mathbb{R}^n come una inversione lungo una sfera contenente l'infinito.

2.6. Il disco di Poincaré. Introduciamo due modelli di \mathbb{H}^n (il *disco* e il *semispazio*) più semplici da visualizzare dell'iperboloide, soprattutto nelle dimensioni $n = 2$ e 3 che ci interesseranno particolarmente in seguito.

Il primo modello conforme per \mathbb{H}^n è il *disco di Poincaré*

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}.$$

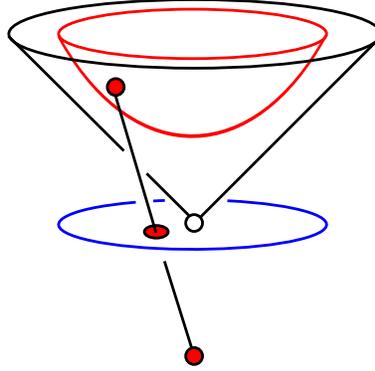


FIGURA 8. La proiezione su $P = (0, \dots, 0, -1)$ induce una bigezione fra I^n e D^n .

Il tensore metrico su D^n ovviamente non è quello euclideo indotto da \mathbb{R}^n , ma è quello indotto da un particolare diffeomorfismo fra I^n e D^n che costruiamo ora. Possiamo identificare \mathbb{R}^n con l'iperpiano orizzontale $x_{n+1} = 0$ in \mathbb{R}^{n+1} e notare che la proiezione sul punto $P = (0, \dots, 0, -1)$ descritta in Fig. 8 induce una bigezione fra I^n ed il disco orizzontale $D^n \subset \mathbb{R}^n$. La proiezione p ha la forma seguente:

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{x_{n+1} + 1}$$

dove l'ultima coordinata nulla per $p(x)$ è stata omessa. Poiché D^n è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , lo spazio tangente in ogni punto di D^n è naturalmente identificato con \mathbb{R}^n .

PROPOSIZIONE 2.22. *Il tensore metrico su D^n indotto dalla proiezione p è il seguente:*

$$g_x = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 \cdot g^E$$

dove $g^E(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ è l'usuale tensore metrico euclideo su $D^n \subset \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $x = (x_1, \dots, x_n) \in D^n$. La mappa inversa p^{-1} alla proiezione è la seguente:

$$p^{-1}(x) = \left(\frac{2x_1}{1 - \|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 - \|x\|^2}, \frac{1 + \|x\|^2}{1 - \|x\|^2} \right).$$

Le rotazioni orizzontali $O(n)$ sono isometrie per I^n e la g_x nell'enunciato è invariante per l'azione di $O(n)$. Possiamo quindi restringerci al caso $x = (x_1, 0, \dots, 0)$. Quindi

$$p^{-1}(x) = \left(\frac{2x_1}{1 - x_1^2}, 0, \dots, 0, \frac{1 + x_1^2}{1 - x_1^2} \right).$$

Il piano tangente T_x è come sempre identificato con \mathbb{R}^n . È facile calcolare le immagini della base canonica di \mathbb{R}^n tramite il differenziale:

$$\begin{aligned} dp_x^{-1}: e_1 &\mapsto \frac{2}{(1 - x_1^2)^2} (1 + x_1^2, 0, \dots, 0, 2x_1), \\ dp_x^{-1}: e_i &\mapsto \frac{2}{1 - x_1^2} e_i \quad \forall i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Le immagini sono vettori ortogonali rispetto al prodotto scalare lorentziano aventi tutti norma $\frac{2}{1-x_1^2}$, quindi g_x è $\frac{4}{(1-x_1^2)^2}$ volte il prodotto scalare euclideo. \square

Vediamo a questo punto come descrivere i k -sottospazi nel modello del disco.

PROPOSIZIONE 2.23. *I k -sottospazi in D^n sono tutte e sole le intersezioni di D^n con k -sfere e k -piani di \mathbb{R}^n ortogonali a ∂D^n .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché ogni k -sottospazio è intersezione di iperpiani, è facile ricondursi al caso $k = n - 1$. Un iperpiano in I^n è $I^n \cap v^\perp$ per qualche vettore v di tipo spazio. Se v è orizzontale (cioè la sua ultima coordinata è nulla) allora v^\perp è verticale e viene proiettato su un iperpiano di D^n passante per il centro. Consideriamo quindi il caso in cui v non sia orizzontale: a meno di isometrie orizzontali in $O(n)$ e di riscalamenti per v è sufficiente considerare il caso $v = (\alpha, 0, \dots, 0, 1)$ con $\alpha > 1$. L'iperpiano è quindi

$$\{x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1\} \cap \{x_{n+1} = \alpha x_1\}.$$

D'altra parte la sfera in \mathbb{R}^n di centro $(\alpha, 0, \dots, 0)$ e raggio $\alpha^2 - 1$ è ortogonale a ∂D^n ed è l'insieme dei punti

$$\{(y_1 - \alpha)^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \alpha^2 - 1\} = \{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 2\alpha y_1 = -1\}$$

cioè gli y tali che $\|y\|^2 = -1 + \frac{2y_1}{\alpha}$. Se $y = p(x)$ valgono le relazioni

$$y_1 = \frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \quad \|y\|^2 = \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1}$$

che trasformano quest'ultima relazione in $x_{n+1} = \alpha x_1$. \square

Infine, vediamo come leggere in D^n una riflessione rispetto ad un iperpiano.

PROPOSIZIONE 2.24. *Sia $S = D^n \cap S'$ un iperpiano, ottenuto a partire da un iperpiano o una ipersfera S' ortogonale a ∂D^n . La riflessione rispetto a S è la normale riflessione euclidea (se S' è un piano) o un'inversione (se S' è una sfera).*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che la riflessione o inversione rispetto a S preserva il tensore metrico su D^n e quindi è una isometria. Poiché la riflessione è l'unica isometria non banale che preserva un iperpiano abbiamo concluso.

Se S' è un piano allora contiene l'origine e la riflessione è una isometria per D^n . Consideriamo il caso in cui S' sia una ipersfera. Innanzitutto, poiché S' è ortogonale a ∂D^n , l'inversione manda effettivamente il disco D^n in se stesso. A meno di rotazioni possiamo supporre che S' abbia centro $x_0 = (\alpha, 0, \dots, 0)$ con $\alpha > 1$ e raggio al quadrato $r^2 = \alpha^2 - 1$. L'inversione ha quindi la forma seguente:

$$i(x) = x_0 + \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2} r^2 = (\alpha, 0, \dots, 0) + \lambda(x_1 - \alpha, x_2, \dots, x_n)$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$ e

$$\lambda = \frac{r^2}{\|x - x_0\|^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{(x_1 - \alpha)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\|x\|^2 - 2x_1\alpha + \alpha^2}.$$

Sappiamo già che le inversioni sono conformi, quindi il differenziale di i in x è una costante positiva per una isometria. Si verifica facilmente che la costante positiva

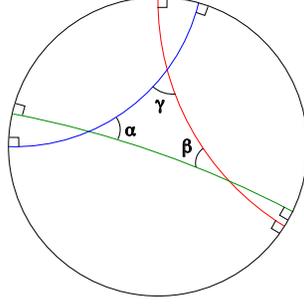


FIGURA 9. Tre rette che determinano un triangolo nel disco di Poincaré. Gli angoli interni α, β e γ sono quelli euclidei.

è proprio λ . Notiamo inoltre che

$$\begin{aligned}
 \|i(x)\|^2 &= \|(\alpha(1-\lambda) + \lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)\|^2 \\
 &= \lambda^2 \|x\|^2 + \alpha^2 (1-\lambda)^2 + 2\alpha(1-\lambda)\lambda x_1 \\
 &= (\lambda-1)\lambda(\|x\|^2 - 2x_1\alpha + \alpha^2) + \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\alpha^2 \\
 &= (\lambda-1)\lambda \frac{\alpha^2 - 1}{\lambda} + \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\alpha^2 \\
 &= 1 - \lambda + \lambda\|x\|^2
 \end{aligned}$$

e quindi $1 - \|i(x)\|^2 = \lambda(1 - \|x\|^2)$ che implica

$$\left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 = \lambda \left(\frac{2}{1 - \|i(x)\|^2} \right)^2 \lambda.$$

Quindi i preserva il tensore metrico. \square

2.7. Il modello del semispazio. Il disco di Poincaré D^n è un modello *conforme* dello spazio iperbolico: il tensore metrico differisce da quello euclideo soltanto per uno scalare (che dipende dal punto x). Le distanze in D^n sono ben diverse da quelle euclidee, ma gli angoli fra curve e sottospazi sono invece gli stessi. Ad esempio, è possibile tracciare tre rette nel piano iperbolico come in Fig. 9: gli angoli interni sono quelli formati dalle tangenti nei punti di intersezione. Si verifica in particolare facilmente che la somma $\alpha + \beta + \gamma$ è sempre minore di π .

Introduciamo un altro modello conforme. Il *modello del semispazio* è l'insieme

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

Il modello H^n è ottenuto dal disco D^n tramite una inversione in \mathbb{R}^n di centro $(0, \dots, 0, -1)$ e di raggio $\sqrt{2}$ come mostrato in Fig. 11. Ricordiamo che le inversioni sono mappe conformi che mandano k -sfere e k -piani in k -sfere e k -piani. Ne segue che anche H^n è un modello conforme dello spazio iperbolico, e che i k -sottospazi in H^n sono ottenuti (come per D^n) intersecando k -piani e k -sfere di \mathbb{R}^n ortogonali al bordo ∂H^n come in Fig. 12. Il bordo ∂H^n è l'iperpiano orizzontale $\{x_n = 0\}$, a cui aggiungiamo un punto all'infinito ∞ , così da avere una corrispondenza biunivoca fra ∂H^n e ∂D^n tramite l'inversione.

PROPOSIZIONE 2.25. *Le traslazioni orizzontali $x \mapsto x+b$ con $b = (b_1, \dots, b_{n-1}, 0)$ e le omotetie $x \mapsto \lambda x$ con $\lambda > 0$ sono isometrie di \mathbb{H}^n .*

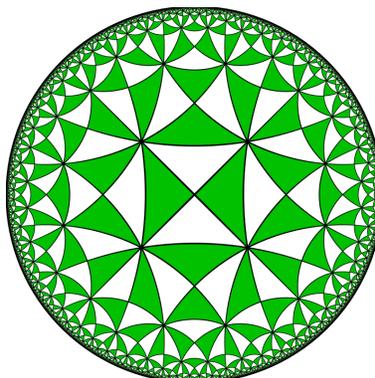


FIGURA 10. Una *tassellazione* di S^2 , \mathbb{R}^2 o \mathbb{H}^2 è una suddivisione del piano in poligoni. La tassellazione di \mathbb{H}^2 mostrata in figura è ottenuta disegnando infinite rette nel piano. I triangoli sono rettangoli e isosceli, e sono tutti isometrici fra loro.

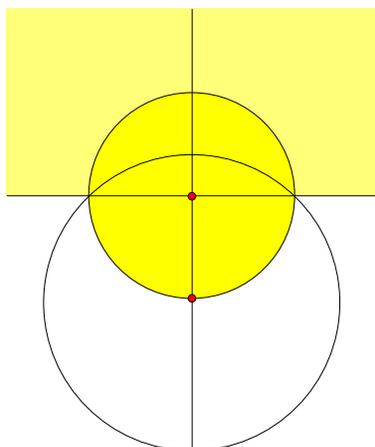


FIGURA 11. L'inversione lungo la sfera di centro $(0, \dots, 0, -1)$ e raggio $\sqrt{2}$ trasforma il disco di Poincaré nel semispazio.

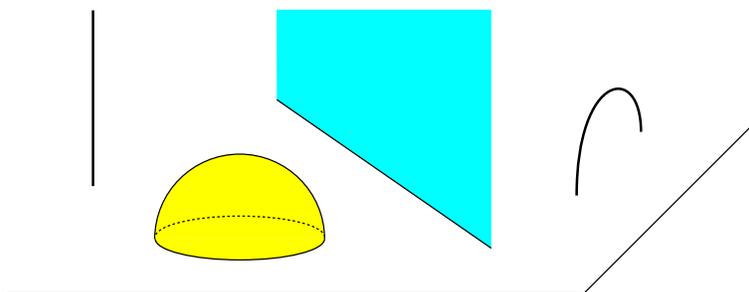


FIGURA 12. Rette e piani in \mathbb{H}^3 visualizzate con il modello del semispazio.

DIMOSTRAZIONE. Ogni traslazione si ottiene come composizione di due inversioni lungo iperpiani verticali ortogonali a b . Ogni omotetia si ottiene come composizione di due inversioni lungo ipersfere opportune centrate nell'origine. \square

Il tensore metrico su H^n ha una forma molto semplice.

PROPOSIZIONE 2.26. *Il tensore metrico su H^n è il seguente:*

$$g_x = \frac{1}{x_n^2} \cdot g^E$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e g^E è l'usuale tensore metrico euclideo su $H^n \subset \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. L'inversione $i: D^n \rightarrow H^n$ sposta l'origine O nel punto $P = (0, \dots, 0, 1)$. Una inversione è una mappa conforme e quindi il differenziale in un punto x è λ volte una isometria di \mathbb{R}^n , con scalare λ dipendente da x . In $x = O$ lo scalare λ è 2. Indicando con g^{H^n} e g^{D^n} i tensori di H^n e D^n e g^E il tensore euclideo, otteniamo

$$g_P^{H^n} = \frac{1}{2} g_O^{D^n} \frac{1}{2} = \frac{4}{4} g^E = g^E.$$

Tramite una traslazione orizzontale possiamo spostare P in un qualsiasi altro punto ad altezza $x_n = 1$. Tutti i punti ad altezza $x_n = 1$ hanno quindi tensore metrico g^E . D'altra parte, la omotetia $x \mapsto \lambda x$ è una isometria di H^n che trasforma un punto ad altezza 1 in un punto ad altezza λ . Poiché il differenziale dell'omotetia è $\lambda \cdot \text{id}$, il tensore metrico nei punti ad altezza λ è $\frac{1}{\lambda^2}$. \square

Anche le geodetiche verticali hanno una forma particolarmente semplice.

PROPOSIZIONE 2.27. *Una geodetica verticale in H^n a velocità unitaria è parametrizzata nel modo seguente:*

$$\gamma(t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, e^t).$$

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che la velocità ha sempre norma uno. Ricordiamo che un vettore v dello spazio tangente nel punto (x_1, \dots, x_n) ha norma $\frac{|v|^E}{x_n}$ dove $|v|^E$ indica la norma euclidea. La velocità al tempo t è $\gamma'(t) = (0, \dots, 0, e^t)$ che ha norma

$$|\gamma'(t)| = \frac{e^t}{e^t} = 1.$$

\square

Possiamo facilmente dedurre una formula per le geodetiche in D^n passanti per l'origine. Ricordiamo la tangente iperbolica:

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}.$$

PROPOSIZIONE 2.28. *Una geodetica in D^n per l'origine con velocità unitaria e direzione $x \in S^{n-1}$ è parametrizzata nel modo seguente:*

$$\gamma(t) = \frac{e^{\|x\|} - 1}{e^{\|x\|} + 1} \cdot x = \left(\tanh \frac{\|x\|}{2} \right) \cdot x.$$

DIMOSTRAZIONE. Si può supporre $x = (0, \dots, 0, 1)$ e ottenere questa parametrizzazione da quella per una retta verticale in \mathbb{H}^n tramite inversione. \square

Otteniamo in particolare:

COROLLARIO 2.29. *La mappa esponenziale $\exp_0: T_0 \rightarrow D^n$ nell'origine 0 di D^n è il diffeomorfismo:*

$$\exp_0(x) = \frac{e^{\|x\|} - 1}{e^{\|x\|} + 1} \cdot \frac{x}{\|x\|} = \left(\tanh \frac{\|x\|}{2} \right) \cdot \frac{x}{\|x\|}$$

Le mappe esponenziali sono quindi tutte isomorfismi ed il raggio di iniettività in ogni punto di \mathbb{H}^n è infinito.

COROLLARIO 2.30. *Nei modelli conformi del disco e del semispazio le k -sfere sono precisamente le usuali k -sfere euclidee (ma con centro e raggio generalmente differenti).*

DIMOSTRAZIONE. Nel modello del disco, la sfera di centro 0 e raggio r è l'usuale sfera di centro 0 e raggio $\ln \frac{1+r}{1-r}$. La generica sfera di centro p e raggio r è ottenuta da questa tramite isometria. Le isometrie di \mathbb{H}^n sono composizioni di riflessioni per la Proposizione 2.15, che nel modello del disco sono inversioni lungo piani e sfere, e quindi mandano sfere e piani in sfere e piani per la Proposizione 2.21. Idem per il modello del semispazio che è collegato al disco tramite inversione. \square

3. Compattificazione e isometrie dello spazio iperbolico

3.1. Punti all'infinito dello spazio iperbolico. In questa sezione compattifichiamo lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n aggiungendo i suoi "punti all'infinito". Per definire i punti all'infinito abbiamo bisogno della nozione seguente.

DEFINIZIONE 3.1. Una *semiretta geodetica* in \mathbb{H}^n è una geodetica $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow M$ con velocità costante pari a uno.

DEFINIZIONE 3.2. L'insieme $\partial\mathbb{H}^n$ dei *punti all'infinito* di \mathbb{H}^n è definito come l'insieme delle semirette geodetiche quozientato per la seguente relazione di equivalenza:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \sup \{ \gamma_1(t), \gamma_2(t) \} < +\infty.$$

Possiamo aggiungere a \mathbb{H}^n i suoi punti all'infinito e definire quindi

$$\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n.$$

PROPOSIZIONE 3.3. *Usando il modello del disco D^n , otteniamo una naturale corrispondenza biunivoca fra ∂D^n e $\partial\mathbb{H}^n$ e quindi fra il disco chiuso $\overline{D^n}$ e $\overline{\mathbb{H}^n}$.*

DIMOSTRAZIONE. Una semiretta geodetica γ in D^n è un arco di circonferenza ortogonale a ∂D^n e quindi $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$ è un punto in ∂D^n . Ci resta da dimostrare che due semirette geodetiche tendono allo stesso punto se e solo se stanno nella stessa classe di equivalenza.

Supponiamo che due semirette γ_1, γ_2 determinino lo stesso punto in ∂D^n . Possiamo usare il modello del semispazio e porre questo punto all'infinito: quindi γ_1 e γ_2 sono due semirette geodetiche verticali che puntano verso l'alto:

$$\gamma_1(t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n e^t),$$

$$\gamma_2(t) = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n e^t),$$

Supponiamo che $x_n < y_n$: posso sostituire γ_1 con la geodetica $\tilde{\gamma}_1(t) = \gamma_1(t + \ln \frac{y_n}{x_n})$ che parte alla stessa altezza di γ_2 ed è chiaramente equivalente a γ_1 visto che $d(\tilde{\gamma}_1(t), \gamma_1(t)) = \ln \frac{y_n}{x_n}$ per ogni t . Si veda Fig. 13.

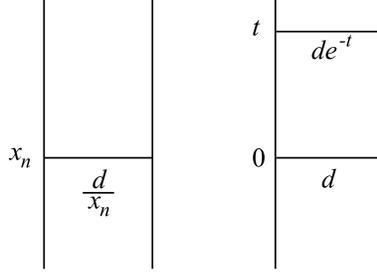


FIGURA 13. Due rette verticali in \mathbb{H}^n a distanza euclidea d . La lunghezza iperbolica del segmento orizzontale che le collega ad altezza x_n è $\frac{d}{x_n}$ e quindi tende a zero per $x_n \rightarrow \infty$ (sinistra). Usando come parametro di altezza la (più intrinseca) lunghezza d'arco delle geodetiche invece di x_n , si vede che le due geodetiche γ_1 e γ_2 in realtà si avvicinano molto più velocemente, in modo esponenziale. Infatti il segmento orizzontale che collega $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ ha lunghezza $d e^{-t}$ (destra). Ne deduciamo che $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq d e^{-t}$.

Posso quindi supporre che $x_n = y_n$. Sia d la distanza fra (x_1, \dots, x_{n-1}) e (y_1, \dots, y_{n-1}) in \mathbb{R}^{n-1} . Il segmento orizzontale che collega $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ ha lunghezza euclidea d ma ha lunghezza iperbolica $\frac{d}{x_n e^t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$. Quindi $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

D'altra parte se γ_1 e γ_2 puntano verso punti diversi di $\partial\mathbb{H}^n$ è facile vedere che non sono equivalenti. Possiamo supporre che γ_1 sia verticale verso l'alto e γ_2 punti verso un punto qualsiasi di $\{x_n = 0\}$. Per ogni $M > 0$ esiste un $t_0 > 0$ tale che $\gamma_1(t)$ viva definitivamente in $x_{n+1} > M$ e $\gamma_2(t)$ viva definitivamente in $x_n < \frac{1}{M}$. La distanza fra $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ è quindi definitivamente maggiore di $\ln M^2$ per ogni M , cioè diverge. \square

Possiamo munire $\overline{\mathbb{H}^n}$ della topologia di $\overline{D^n}$: in questo modo abbiamo *compatificato* lo spazio iperbolico aggiungendo i suoi punti all'infinito. La parte interna di $\overline{\mathbb{H}^n}$ è \mathbb{H}^n . I punti all'infinito formano una sfera $\partial\mathbb{H}^n$.

Nota che mentre \mathbb{H}^n è una varietà riemanniana completa (e quindi uno spazio metrico), la sua compattezza $\overline{\mathbb{H}^n}$ è solo uno spazio topologico: non è definita una distanza fra un punto di $\partial\mathbb{H}^n$ ed un punto in \mathbb{H}^n , né fra due punti distinti di $\partial\mathbb{H}^n$.

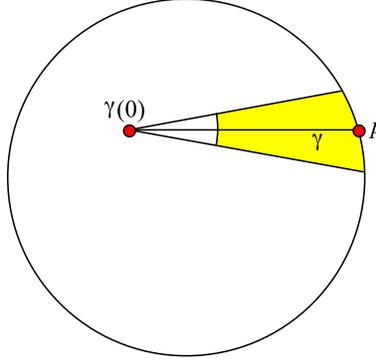
La topologia su $\overline{\mathbb{H}^n}$ può essere in realtà definita senza fare uso del modello D^n . La definizione intrinseca è la seguente: oltre agli aperti di \mathbb{H}^n , aggiungiamo per ogni $p \in \partial\mathbb{H}^n$ un sistema di intorni aperti di p in $\overline{\mathbb{H}^n}$ nel modo seguente.

Sia γ una geodetica che rappresenta p e sia V un intorno aperto del vettore $\gamma'(0)$ nella sfera unitaria di $T_{\gamma(0)}$. Sia infine $r > 0$. Definiamo l'insieme

$$U(\gamma, V, r) = \{ \alpha(t) \mid \alpha(0) = \gamma(0), \alpha'(0) \in V, t > r \} \\ \bigcup \{ [\alpha] \mid \alpha(0) = \gamma(0), \alpha'(0) \in V \}$$

dove α indica sempre una semiretta in \mathbb{H}^n . Si veda ad esempio Fig. 14. Definiamo un sistema di intorni per p prendendo gli aperti $U(\gamma, V, r)$ al variare di γ , V e r . Si ottiene così per $\overline{\mathbb{H}^n}$ la stessa topologia indotta da $\overline{D^n}$.

3.2. Isometrie ellittiche, paraboliche e iperboliche. Ogni isometria di \mathbb{H}^n si estende al bordo.

FIGURA 14. Un intorno $U(\gamma, V, r)$ del punto $p \in \partial\mathbb{H}^n$ (in giallo).

PROPOSIZIONE 3.4. *Ogni isometria $\varphi: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ si estende ad un unico omeomorfismo $\varphi: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$. Una isometria φ è determinata dalla sua traccia $\varphi|_{\partial\mathbb{H}^n}$ al bordo.*

DIMOSTRAZIONE. L'estensione di φ al bordo è definita in modo naturale: un punto al bordo è una classe $[\gamma]$ di semirette geodetiche e nell'estensione poniamo $\varphi([\gamma]) = [\varphi(\gamma)]$. L'estensione è banalmente un omeomorfismo per le riflessioni lungo sottospazi, e quindi lo è per ogni isometria. \square

PROPOSIZIONE 3.5. *Sia φ una isometria di \mathbb{H}^n . Vale uno (ed uno solo) dei fatti seguenti.*

- (1) φ ha almeno un punto fisso in \mathbb{H}^n ,
- (2) φ non ha punti fissi in \mathbb{H}^n e ne ha esattamente uno in $\partial\mathbb{H}^n$,
- (3) φ non ha punti fissi in \mathbb{H}^n e ne ha esattamente due in $\partial\mathbb{H}^n$.

DIMOSTRAZIONE. L'estensione $\varphi: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ è una mappa continua. Poiché $\overline{\mathbb{H}^n}$ è omeomorfo al disco chiuso, il teorema di punto fisso di Brouwer garantisce l'esistenza di un punto fisso per φ .

Ci resta solo da mostrare che se non ci sono punti fissi in \mathbb{H}^n allora i punti fissi al bordo sono al massimo due. Supponiamo per assurdo che siano almeno tre P_1, P_2, P_3 . Una isometria che fissa due punti al bordo fissa anche l'unica geodetica che collega i due punti. Quindi φ fissa la geodetica γ che collega P_1 e P_2 . D'altra parte è facile vedere che fra le infinite geodetiche che puntano su P_3 ce n'è una sola η ortogonale a γ . L'isometria fissa P_3 e quindi deve fissare anche η . In particolare fissa il punto di intersezione $\gamma \cap \eta$: assurdo. \square

Le isometrie di tipo (1), (2) e (3) sono dette rispettivamente *ellittiche*, *paraboliche* e *iperboliche*.

3.3. Sottospazi incidenti, paralleli e ultraparalleli. Ogni k -sottospazio $S \subset \mathbb{H}^n$ ha una chiusura topologica $\overline{S} \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ nello spazio iperbolico compattificato. Nei due modelli conformi, la traccia al bordo $\partial S = \overline{S} \cap \partial\mathbb{H}^n$ è una $(k-1)$ -sfera (oppure un $(k-1)$ -piano più il punto all'infinito nel modello del semispazio).

La *distanza* $d(A, B)$ fra due sottoinsiemi A, B di uno spazio metrico è definita come

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \{d(x, y)\}.$$

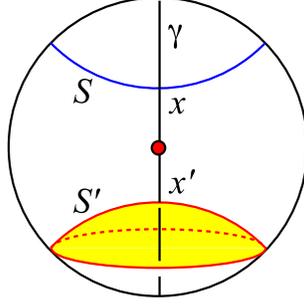


FIGURA 15. I due sottospazi sono porzioni di sfere curvate in modo opposto rispetto all'origine.

PROPOSIZIONE 3.6. *Siano S e S' due sottospazi di \mathbb{H}^n di dimensioni arbitrarie. Vale uno (ed uno solo) dei fatti seguenti.*

- (1) $S \cap S' \neq \emptyset$,
- (2) $S \cap S' = \emptyset$ e $\overline{S} \cap \overline{S'}$ è un punto in $\partial\mathbb{H}^n$; inoltre $d(S, S') = 0$ e non esiste nessuna geodetica ortogonale a S e S' ,
- (3) $\overline{S} \cap \overline{S'} = \emptyset$; inoltre $d = d(S, S') > 0$ ed esiste un'unica geodetica γ ortogonale a S e S' : il segmento di γ tra S e S' è l'unico arco fra i due sottospazi lungo esattamente d .

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo innanzitutto mostrare che i tre casi esauriscono tutte le possibilità, cioè che se $\partial S \cap \partial S'$ contiene almeno due punti allora $S \cap S'$ non è vuoto. Se $\partial S \cap \partial S'$ contiene due punti allora sia S che S' contiene l'intera geodetica che collega questi due punti, e quindi $S \cap S' \neq \emptyset$.

Nel caso (2) i sottospazi S e S' contengono due rette $r \subset S$ e $r' \subset S'$ che puntano verso lo stesso punto all'infinito. Usando il modello del semispazio e ponendo questo punto all'infinito i sottospazi S e S' diventano due sottospazi verticali. Come abbiamo visto nella dimostrazione della Proposizione 3.3 due rette verticali qualsiasi contenute in S e S' si avvicinano definitivamente e quindi $d(S, S') = 0$. Inoltre è chiaro che non esiste nessuna geodetica ortogonale a due sottospazi verticali.

Consideriamo il caso (3). Siano $x_i \in S$ e $x'_i \in S'$ due successioni di punti tali che $d(x_i, x'_i) \rightarrow d$. Poiché \mathbb{H}^n è compatto possiamo supporre che entrambe convergano $x_i \rightarrow x$ e $x'_i \rightarrow x'$ a qualche punto $x, x' \in \mathbb{H}^n$. Vale $x \in \overline{S}$ e $x' \in \overline{S'}$. Per ipotesi $x \neq x'$ e questo fatto implica che $d > 0$ e $x, x' \in \mathbb{H}^n$: se uno dei due punti limite x, x' fosse all'infinito la distanza $d(x_i, x'_i)$ tenderebbe anch'essa a infinito.

Sia γ la retta geodetica passante per i punti x e x' . Il segmento fra x e x' è lungo $d(x, x') = d$. La retta deve essere ortogonale a S e S' : se formasse con S un angolo in x minore di $\frac{\pi}{2}$ potremmo cambiare localmente la curva intorno a x e trasformarla in una curva (non geodetica) che collega S e S' con lunghezza minore di d .

Infine, mostriamo che γ è l'unica retta ortogonale a S e S' . Usiamo il modello del disco, prendiamo un qualsiasi punto di γ tra x e x' e lo spostiamo sull'origine come in Fig. 15. Le rette ortogonali a γ passanti per x e x' sono archi di circonferenze che si incurvano in direzioni opposte ed è chiaro che non c'è nessuna geodetica che possa essere ortogonale ad entrambe. \square

Due sottospazi di tipo (1), (2) o (3) sono detti rispettivamente *incidenti*, *asintoticamente paralleli* e *ultra-paralleli*.

3.4. Isometrie di \mathbb{H}^2 e \mathbb{H}^3 . Se M è una varietà riemanniana orientabile, indichiamo con $\text{Isom}^+(M)$ il gruppo di isometrie di M che ne preservano l'orientazione. I gruppi $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ e $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ possono essere descritti in modo conveniente come opportuni gruppi di matrici 2×2 .

Ricordiamo che la *sfera di Riemann* $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è un oggetto centrale in analisi complessa e in geometria proiettiva. In analisi complessa un *automorfismo* della sfera di Riemann è un *biolomorfismo* di S , cioè una funzione meromorfa su S che induce una corrispondenza biunivoca da S in sé. Teoremi di analisi complessa garantiscono che gli automorfismi di S sono esattamente le *trasformazioni di Möbius*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

dove a, b, c, d sono numeri complessi tali che $ad - bc \neq 0$. Una trasformazione di Möbius è quindi determinata da una matrice invertibile $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e due trasformazioni si compongono come la moltiplicazione fra matrici. Inoltre è facile verificare che due matrici A e B determinano la stessa trasformazione se e solo se $B = \lambda A$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Il gruppo delle trasformazioni di Möbius è quindi naturalmente isomorfo a

$$\mathbb{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{PSL}_2(\mathbb{C}) = \text{GL}_2(\mathbb{C}) / \{\lambda I\} = \text{SL}_2(\mathbb{C}) / \pm I.$$

Generalmente il simbolo \mathbb{P} davanti ad un insieme di matrici (o altri oggetti) indica che si quozienta l'insieme per la relazione $A \sim \lambda A$ per ogni $\lambda \neq 0$. Ricordiamo inoltre che $\text{GL}_n(K)$ è il gruppo moltiplicativo delle matrici $n \times n$ a valori nel campo K e $\text{SL}_n(K)$ è il sottogruppo formato dalle matrici a determinante uno.

In geometria proiettiva la sfera di Riemann è la retta proiettiva complessa $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e i suoi automorfismi sono le sue *proiettività*

$$[z, w] \mapsto [az + bw, cz + dw]$$

dove (come sopra) $ad - bc \neq 0$. Anche in questo contesto le proiettività sono esattamente le trasformazioni di Möbius ed il gruppo delle proiettività di \mathbb{CP}^1 è sempre $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{C})$. Ricordiamo che una proiettività di \mathbb{CP}^n è determinata dal suo comportamento su $n + 2$ punti in posizione generale. Per $n = 1$ otteniamo quindi:

PROPOSIZIONE 3.7. *Date due terne $\{P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ di punti distinti in \mathbb{CP}^1 esiste un'unica trasformazione di Möbius φ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni i .*

Le trasformazioni di Möbius in cui a, b, c, d sono numeri reali con determinante positivo $ad - bc > 0$ formano un sottogruppo indicato con $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R}) / \pm I.$$

È facile vedere che queste sono esattamente le trasformazioni di Möbius che preservano la retta reale estesa $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e che non scambiano le due componenti connesse di $(\mathbb{C} \cup \infty) \setminus (\mathbb{R} \cup \infty)$.

PROPOSIZIONE 3.8. *Date due terne $\{P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ di punti distinti in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con la stessa orientazione ciclica esiste un'unica trasformazione di Möbius $\varphi \in \mathbb{PSL}_2(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni i .*

DIMOSTRAZIONE. Esiste un'unica trasformazione di Möbius $\varphi \in \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$. Poiché le trasformazioni di Möbius mandano circonferenze di \mathbb{C} (incluse le rette con il punto ∞) in sé, la trasformazione φ preserva l'unica circonferenza $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ passante per i tre punti. Il fatto che i punti abbiano la stessa orientazione ciclica garantisce che φ mantenga l'orientazione di $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e quindi non scambi le due componenti connesse di $(\mathbb{C} \cup \infty) \setminus (\mathbb{R} \cup \infty)$. \square

Identifichiamo \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} e vediamo il piano iperbolico \mathbb{H}^2 come

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}.$$

Il gruppo $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agisce quindi sul piano iperbolico \mathbb{H}^2 .

PROPOSIZIONE 3.9. *Con il modello del semipiano* $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

DIMOSTRAZIONE. Il gruppo $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ è generato dalle seguenti trasformazioni:

- (1) le traslazioni $z \mapsto z + b$ con $b \in \mathbb{R}$, corrispondenti alle matrici $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- (2) le omotetie $z \mapsto \lambda z$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$, corrispondenti alle matrici $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$,
- (3) l'inversione $z \mapsto -\frac{1}{z}$ corrispondente alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mostriamo che queste trasformazioni generano $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Sia $\varphi \in \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. I tre punti $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(\infty)$ sono tre punti di $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ coorientati con la terna $0, 1, \infty$. Se $\varphi(\infty) \neq \infty$, con una traslazione si può spostare $\varphi(\infty)$ in 0 e quindi con una inversione in ∞ . Con una traslazione successiva si può spostare $\varphi(0)$ in 0 tenendo fisso ∞ . Infine, con una omotetia teniamo fissi 0 e ∞ e spostiamo $\varphi(1)$ in 1 . L'unica trasformazione che fissa i tre punti $0, 1$ e ∞ è l'identità e quindi siamo a posto.

D'altra parte traslazioni, omotetie e l'inversione sono chiaramente isometrie di \mathbb{H}^2 (l'inversione è una inversione rispetto alla circonferenza $|z| = 1$). Quindi $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$.

Infine, anche una isometria $\varphi \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ è determinata dall'immagine di 3 punti nel bordo $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}^2$. Supponiamo infatti che φ fissi 3 punti P, Q, R del bordo. Allora preserva la geodetica γ che unisce P e Q . Abbiamo già visto che preserva anche l'unica geodetica η uscente da R ortogonale a γ , e quindi il punto $\eta \cap \gamma$. La restrizione di φ alla retta γ è una isometria che preserva l'orientazione e fissa un punto $\gamma \cap \eta$; quindi φ fissa tutti i punti della retta γ . Analogamente fissa tutti i punti della retta η . Quindi il differenziale $d_{\gamma \cap \eta} \varphi$ è l'identità, e segue che φ è globalmente l'identità per il Teorema 1.28. \square

Le isometrie che preservano l'orientazione di \mathbb{H}^3 sono descritte invece dall'intero gruppo delle trasformazioni di Möbius nel modo seguente. Identifichiamo

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \{(z, t) \mid z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Identifichiamo anche il piano ad altezza $t = 0$ con \mathbb{C} . Ogni isometria di \mathbb{H}^3 si estende al bordo

$$\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

La proposizione seguente dice che la traccia al bordo di ogni isometria è un elemento di $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ e che la traccia induce una bigezione fra $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ e $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

PROPOSIZIONE 3.10. *Con il modello del semispazio* $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è simile a quella precedente. In modo analogo si dimostra che $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ è generato dalle seguenti trasformazioni:

- (1) le traslazioni $z \mapsto z + b$ con $b \in \mathbb{C}$, corrispondenti alle matrici $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- (2) le omotetie $z \mapsto \lambda z$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$, corrispondenti alle matrici $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$,
- (3) l'inversione $z \mapsto -\frac{1}{z}$ corrispondente alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ciascuna di queste trasformazioni è la traccia di una isometria di \mathbb{H}^3 :

- (1) le traslazioni orizzontali $(z, t) \mapsto (z + b, t)$,
- (2) Se $\lambda = \rho e^{i\theta}$, la composizione di una omotetia $(z, t) \mapsto \rho(z, t)$ e di una rotazione $(z, t) \mapsto (e^{i\theta}z, t)$,
- (3) l'inversione rispetto alla sfera $|z|^2 + t^2 = 1$.

Infine, si mostra come sopra che ogni isometria è un elemento di $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, perché una isometria di \mathbb{H}^3 che fissa tre punti al bordo P, Q, R e preserva l'orientazione di \mathbb{H}^3 è l'identità. Come sopra mostriamo infatti che l'isometria deve fissare puntualmente due geodetiche γ e η ; il differenziale in $\gamma \cap \eta$ è quindi l'identità se ristretto al piano π tangente a γ e η . Sulla retta ortogonale al piano π il differenziale può essere solo $+1$ o -1 , ed è $+1$ perché preserva l'orientazione. Quindi il differenziale è l'identità su tutto lo spazio tangente $T_{\gamma \cap \eta}$ e concludiamo come sopra. \square

Le isometrie che invertono l'orientazione di \mathbb{H}^2 e \mathbb{H}^3 possono essere descritte analogamente come antitrasformazioni di Möbius:

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Per \mathbb{H}^2 si considerano soltanto antitrasformazioni con coefficienti reali e determinante $ad - bc < 0$ negativo. Si possono identificare i gruppi

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) = \mathbb{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

con la convenzione che le matrici a determinante negativo agiscono come antitrasformazioni di Möbius.

3.5. Orosfere. Mostriamo fra poco un modo agevole con cui descrivere ogni isometria ellittica, parabolica o iperbolica. Per studiare le isometrie paraboliche è opportuno introdurre la nozione di *orosfera*.

DEFINIZIONE 3.11. Sia p un punto di $\partial\mathbb{H}^n$. Una *orosfera* centrata in p è una ipersuperficie connessa ortogonale a tutte le rette geodetiche uscenti da p .

Le orosfere possono essere visualizzate in modo semplice usando il modello del semispazio e ponendo p all'infinito. Le rette geodetiche uscenti da p sono tutte e sole le rette verticali e le orosfere centrate in p sono quindi tutti e soli gli iperpiani orizzontali $\{x_n = k\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}_{>0}$.

OSSERVAZIONE 3.12. Poiché il tensore metrico $g = \frac{1}{x_n^2} g^E$ è costante su ogni iperpiano orizzontale, ogni orosfera è *isometrica* a \mathbb{R}^n e quindi *piatta* (cioè con curvatura sezionale nulla). Questo fatto è abbastanza sorprendente e peculiare della geometria iperbolica: lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n contiene ipersuperfici isometriche a \mathbb{H}^{n-1} (gli iperpiani), \mathbb{R}^{n-1} (le orosfere) e S^{n-1} (le sfere).

Le orosfere centrate in un punto $p \neq \infty$ di $\partial\mathbb{H}^n$ o in un punto qualsiasi p di ∂D^n nel modello del disco sono tutte e sole le ipersfere tangenti al punto. Le orosfere in \mathbb{H}^2 sono circonferenze e vengono quindi chiamate *orocicli*; un orociclo è mostrato in Fig. 16.

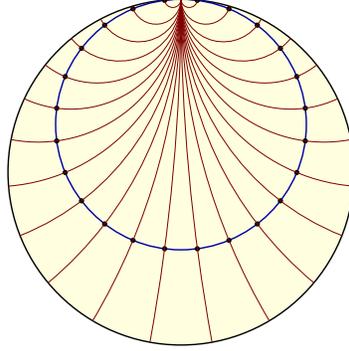


FIGURA 16. Una orosfera in \mathbb{H}^2 centrata in $p \in \partial\mathbb{H}^2$ è una circonferenza tangente a p . L'orosfera è per definizione ortogonale a tutte le (infinite) geodetiche uscenti da p .

Torniamo alle isometrie di \mathbb{H}^n . Nel modello del semispazio indichiamo un punto come coppia (x, t) dove $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $t = x_{n+1}$.

PROPOSIZIONE 3.13. *Sia φ una isometria di \mathbb{H}^n :*

- (1) *se φ è ellittica con punto fisso nell'origine di D^n allora*

$$\varphi(x) = Ax$$

per una matrice $A \in O(n)$;

- (2) *se φ è parabolica con punto fisso ∞ nel semispazio H^n allora*

$$\varphi(x, t) = (Ax + b, t)$$

per una matrice $A \in O(n)$ ed un vettore b ;

- (3) *se φ è iperbolica con punti fissi 0 e ∞ allora*

$$\varphi(x, t) = \lambda(Ax, t)$$

per una matrice $A \in O(n)$ ed uno scalare $\lambda \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. In (1) la mappa $x \mapsto Ax$ è una isometria perché il tensore metrico ha simmetria sferica. Variando $A \in O(n)$ si ottengono tutte le possibili isometrie dello spazio tangente in 0 , e quindi tutte le possibili isometrie di \mathbb{H}^n che fissano 0 per il Teorema 1.28.

Per (2) dimostriamo innanzitutto che φ preserva ciascuna orosfera centrata in ∞ . L'immagine dell'orosfera O_0 ad altezza $t = t_0$ è necessariamente un'orosfera O_1 ad una qualche altezza $t = t_1$. Supponiamo per assurdo che $t_1 \neq t_0$: a meno di cambiare φ con la sua inversa possiamo supporre $t_1 < t_0$. La restrizione

$$\varphi|_{O_0}: O_0 \rightarrow O_1$$

è una isometria. Poiché le metriche di O_0 e O_1 sono rispettivamente $\frac{1}{t_0^2}$ e $\frac{1}{t_1^2}$ volte quella euclidea, letta con la metrica euclidea la restrizione $\varphi|_{O_0}$ è una contrazione. Possiamo identificare O_0 e O_1 facendo coincidere (x, t_0) con (x, t_1) e usare il Teorema delle contrazioni per concludere che esiste un $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale che $\varphi(x, t_0) = \varphi(x, t_1)$. La geodetica verticale passante per questi due punti è quindi

preservata, e quindi è preservato anche l'altro suo punto all'infinito $(x, 0)$: assurdo perché φ è parabolica (e non iperbolica).

Sappiamo che φ preserva ogni orosfera O centrata in ∞ . Poiché φ preserva le geodetiche verticali, agisce su ogni orosfera allo stesso modo. Deve preservare la metrica di O , che è euclidea. Quindi è del tipo $x \mapsto Ax + b$.

Infine, in (3) notiamo come in (1) che le isometrie del tipo $\lambda(Ax, t)$ sono trasformazioni aventi 0 e ∞ come punto fisso, e che variando A e λ si ottengono tutte le possibilità. Infatti tali trasformazioni preservano la geodetica che unisce 0 e ∞ e quindi mandano il punto $(0, 1)$ in un punto $(0, \lambda)$. Il differenziale di φ in $(0, 1)$ è necessariamente del tipo $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ per una matrice $A \in O(n)$, lo stesso differenziale di $x \mapsto \lambda \left(\frac{A}{\lambda}, t \right)$. \square

Lo spostamento minimo $d(\varphi)$ di una isometria φ di \mathbb{H}^n è

$$d(\varphi) = \inf_{x \in \mathbb{H}^n} d(x, \varphi(x)).$$

I punti che realizzano questo spostamento minimo sono gli x tali che $d(x, \varphi(x)) = d(\varphi)$.

COROLLARIO 3.14. *Valgono i fatti seguenti:*

- (1) una trasformazione ellittica ha spostamento minimo $d = 0$ realizzato in almeno un punto,
- (2) una trasformazione parabolica con punto fisso $p \in \partial\mathbb{H}^n$ ha spostamento minimo $d = 0$ realizzato in nessun punto e fissa ogni orosfera centrata in p ;
- (3) una trasformazione iperbolica con punti fissi $p, q \in \partial\mathbb{H}^n$ ha spostamento minimo positivo $d > 0$ realizzato in tutti e soli i punti della geodetica con estremi in p e q .

DIMOSTRAZIONE. In (2) è chiaro che $(x, t) \mapsto (Ax + b, t)$ fissa l'orosfera ad altezza t . Poiché la metrica sull'orosfera ad altezza t è $\frac{1}{t^2}$ volte quella euclidea, se $t \rightarrow \infty$ i punti si spostano sempre meno, e lo spostamento tende a zero.

In (3) valutiamo la mappa $(x, t) \mapsto \lambda(Ax, t)$ e quindi la distanza fra (x, t) e $(\lambda Ax, \lambda t)$. Se $x = 0$ la distanza è $d = \ln \lambda$, se $x \neq 0$ è strettamente maggiore, come si vede facilmente integrando lungo un segmento euclideo che collega i due punti. \square

3.6. Area e curvatura. Possiamo finalmente verificare che \mathbb{H}^n ha curvatura sezionale costante -1 . Che lo spazio iperbolico abbia curvatura costante non dovrebbe sorprendere: questo fatto è conseguenza dell'eccezionale quantità di simmetrie (cioè isometrie) di \mathbb{H}^n . Per calcolare la curvatura dobbiamo stimare la differenza fra l'area di un disco iperbolico e di un disco euclideo aventi lo stesso raggio r .

PROPOSIZIONE 3.15. *Il disco di raggio r in \mathbb{H}^2 ha area*

$$A(r) = \pi \left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}} \right)^2 = 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2} = 2\pi(\cosh r - 1).$$

DIMOSTRAZIONE. In generale, sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto dotato di un arbitrario tensore metrico g , che possiamo interpretare come una matrice quadrata g_x dipendente da $x \in U$. Ricordiamo che g induce una forma di volume in U , ed il volume

di un dominio $D \subset U$ è

$$\text{Vol}(D) = \int_D \sqrt{\det g} \cdot dx_1 \cdots dx_n.$$

Sia quindi $D(r)$ il disco in \mathbb{H}^2 di centro 0 e di raggio iperbolico r . Il raggio euclideo è quindi $\tanh \frac{r}{2}$ per il Corollario 2.29. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} A(r) &= \text{Vol}(D(r)) = \int_{D(r)} \sqrt{g} \cdot dx dy = \int_{D(r)} \left(\frac{2}{1-x^2-y^2} \right)^2 dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\tanh \frac{r}{2}} \left(\frac{2}{1-\rho^2} \right)^2 \rho \cdot d\rho d\theta = 2\pi \left[\frac{2}{1-\rho^2} \right]_0^{\tanh \frac{r}{2}} \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{1-\tanh^2 \frac{r}{2}} - 1 \right) = 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

□

COROLLARIO 3.16. *Lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n ha curvatura sezionale costante -1 .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in \mathbb{H}^n$ un punto e $W \subset T_p$ un piano vettoriale. L'immagine $\exp_p(W)$ tramite mappa esponenziale è il piano iperbolico passante per p tangente a W , isometrico a \mathbb{H}^2 . Il disco di raggio r ha area

$$A(r) = 2\pi(\cosh r - 1) = 2\pi \left(\frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + o(r^4) \right) = \pi r^2 + \frac{\pi r^4}{12} + o(r^4)$$

e quindi $K = -1$ secondo la Definizione 1.22.

□

Varietà iperboliche

1. Gruppi di isometrie

1.1. Varietà iperboliche, piatte e ellittiche. Una varietà iperbolica, piatta o ellittica è una varietà riemanniana modellata localmente su aperti di \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n o S^n .

DEFINIZIONE 1.1. Una *varietà iperbolica* (rispettivamente *piatta* o *ellittica*) è una n -varietà riemanniana in cui ogni punto ha un intorno aperto isometrico ad un aperto di \mathbb{H}^n (risp. \mathbb{R}^n o S^n).

OSSERVAZIONE 1.2. Una varietà iperbolica (risp. piatta o ellittica) ha curvatura sezionale costante -1 (risp. 0 o $+1$). È possibile dimostrare l'opposto, cioè che una varietà riemanniana con curvatura costante -1 (risp. 0 o $+1$) è necessariamente iperbolica (risp. piatta o ellittica).

Lo scopo principale di questa sezione sarà dimostrare il Teorema 1.18, secondo cui ogni varietà iperbolica (piatta o ellittica) è ottenuta da \mathbb{H}^n (\mathbb{R}^n o S^n) come quoziente di un opportuno gruppo di isometrie. Per introdurre l'argomento richiamiamo innanzitutto alcuni fatti di topologia generale.

1.2. Azioni di un gruppo e rivestimenti. Ricordiamo brevemente in questa sezione alcune nozioni di topologia generale.

DEFINIZIONE 1.3. Una *azione* di un gruppo G su uno spazio topologico X è un omomorfismo $\rho: G \rightarrow \text{Omeo}(X)$ a valori nel gruppo $\text{Omeo}(X)$ degli omeomorfismi da X in sé.

Nei casi che studieremo G sarà semplicemente un sottogruppo di $\text{Omeo}(X)$. In generale, si indica comunque con $g(x)$ l'elemento $\rho(g)(x)$ per ogni $g \in G$ e $x \in X$. Ricordiamo che l'*orbita* di un punto $x \in X$ è l'insieme

$$\{g(x) \mid g \in G\} \subset X$$

mentre lo *stabilizzatore* di $x \in X$ è il sottogruppo

$$\{g \mid g(x) = x\} < G.$$

Le orbite definiscono una partizione dello spazio X : due punti $x, y \in X$ stanno nella stessa orbita se e solo se $y = g(x)$ per qualche $g \in G$. Lo spazio topologico quoziente X/G è ottenuto identificando i punti che stanno nella stessa orbita. Diamo due definizioni importanti.

DEFINIZIONE 1.4. L'azione di G è *libera* se ogni $g \in G$ non banale non ha punti fissi, cioè $g(x) \neq x$ per ogni $x \in X$.

L'azione è *propriamente discontinua* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esistono due intorni aperti $U_x \ni x$ e $U_y \ni y$ tali che $g(U_x) \cap U_y \neq \emptyset$ solo per un insieme finito di $g \in G$.

Sia G un gruppo che agisce su uno spazio topologico X di Hausdorff. Ricordiamo il teorema seguente di topologia.

PROPOSIZIONE 1.5. *Sono fatti equivalenti:*

- (1) G agisce in modo libero e propriamente discontinuo,
- (2) X/G è di Hausdorff e la proiezione $p: X \rightarrow X/G$ è un rivestimento.

Ricordiamo alcuni fatti noti sui rivestimenti. Considereremo implicitamente solo rivestimenti fra spazi sufficientemente regolari (di Hausdorff, connessi, localmente connessi per archi e localmente contrattili).

Un *automorfismo* di un rivestimento $p: X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo $f: X \rightarrow X$ tale che $p = p \circ f$. Gli automorfismi di un rivestimento formano un gruppo che indichiamo con $\text{Aut}(p)$. Il gruppo $\text{Aut}(p)$ agisce in modo libero e propriamente discontinuo su X . È quindi naturale chiedersi se il rivestimento $p: X \rightarrow Y$ sia il quoziente rispetto a tale azione: vediamo che questo accade solo per una classe specifica di rivestimenti.

Ricordiamo che un rivestimento induce una mappa iniettiva $p_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ a livello di gruppi fondamentali (omettiamo il punto base nella notazione). Il rivestimento è detto *regolare* se l'immagine $p_*(\pi_1(X))$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(Y)$.

PROPOSIZIONE 1.6. *Se $p: X \rightarrow Y$ è un rivestimento regolare allora $Y = X/\text{Aut}(p)$ e vale l'isomorfismo*

$$\text{Aut}(p) \cong \pi_1(Y)/p_*(\pi_1(X)).$$

COROLLARIO 1.7. *Se $p: \tilde{X} \rightarrow X$ è un rivestimento universale allora $X = \tilde{X}/\text{Aut}(p)$ e*

$$\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X)$$

Un rivestimento regolare $p: X \rightarrow Y$ può quindi sempre essere interpretato come l'effetto dell'azione di un gruppo $\text{Aut}(p)$ su X .

1.3. Gruppi di Lie. Gli esempi più importanti di varietà iperboliche, piatte ed ellittiche si ottengono quotizzando lo spazio iperbolico, piatto ed ellittico tramite un opportuno gruppo di isometrie. Ricordiamo la definizione seguente.

DEFINIZIONE 1.8. Un *gruppo di Lie* è un gruppo G munito di una struttura di varietà differenziabile, tale che le operazioni

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, & (a, b) &\mapsto ab \\ G &\rightarrow G, & a &\mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

siano funzioni lisce.

Un gruppo di Lie di dimensione zero è semplicemente un insieme di punti munito della topologia discreta. Un tale gruppo di Lie è detto *discreto*. Qualsiasi gruppo è in modo naturale un gruppo discreto.

I gruppi di Lie sono oggetti importanti in geometria riemanniana in virtù del fatto seguente, che non dimostriamo. Ricordiamo che una mappa fra spazi topologici è *propria* se la controimmagine di un compatto è sempre compatta.

TEOREMA 1.9 (Myers-Steenrod). *Il gruppo di isometrie $\text{Isom}(M)$ di una varietà riemanniana ha una naturale struttura di gruppo di Lie, che rende la mappa seguente liscia e propria:*

$$\begin{aligned} \text{Isom}(M) \times M &\rightarrow M \times M \\ (\varphi, p) &\mapsto (\varphi(p), p) \end{aligned}$$

Il gruppo di Lie $\text{Isom}(M)$ può avere infinite componenti connesse e può avere dimensione zero. Il teorema di Myers-Steenrod per le varietà che ci interessano può essere dimostrato direttamente: abbiamo già visto che i gruppi di isometrie di \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n e S^n sono isomorfi a particolari gruppi di matrici

$$\text{Isom}(\mathbb{H}^n) \cong O_*(n, 1), \quad \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \cong O(n) \times \mathbb{R}^n, \quad \text{Isom}(S^n) \cong O(n+1)$$

e ciascuno di questi gruppi ha una naturale struttura di gruppo di Lie.¹ Tutti e tre i gruppi hanno due componenti connesse: la componente connessa contenente l'identità è formata dalle isometrie che preservano l'orientazione. Notiamo che $\text{Isom}(S^n)$ è compatto mentre $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ e $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ non lo sono: effettivamente, il teorema di Myers-Steenrod implica immediatamente il fatto seguente.

COROLLARIO 1.10. *Il gruppo di isometrie di una varietà compatta è compatto.*

1.4. Gruppi discreti di isometrie. Se G è un gruppo di isometrie di una varietà riemanniana M , è facile capire quando G agisce in modo propriamente discontinuo:

PROPOSIZIONE 1.11. *Sia $G < \text{Isom}(M)$ un gruppo di isometrie di una varietà riemanniana M . L'azione di G su M è propriamente discontinua se e solo se G è un sottoinsieme discreto di $\text{Isom}(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. È facile mostrare che, essendo M di Hausdorff e localmente compatto, l'azione di G è propriamente discontinua se e solo se vale il fatto seguente: per ogni compatto $K \subset M$ esistono un numero finito di $g \in G$ tali che $g(K) \cap K \neq \emptyset$.

Per il Teorema di Myers-Steenrod la mappa

$$F: \text{Isom}(M) \times M \rightarrow M \times M, \quad (\varphi, p) \mapsto (\varphi(p), p)$$

è propria. Sia $\pi: \text{Isom}(M) \times M \rightarrow \text{Isom}(M)$ la proiezione sul primo fattore. Un insieme $K \subset M$ definisce un insieme $Z \subset \text{Isom}(M)$ nel modo seguente:

$$Z = \pi(F^{-1}(K \times K)) = \{g \in \text{Isom}(M) \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\}.$$

Se $K \subset M$ è compatto allora Z è compatto, perché F è propria. Se G è discreto, interseca il compatto Z in un numero finito di punti, e quindi l'azione è propriamente discontinua.

Se K è un intorno di un punto $x \in M$, l'insieme Z è un intorno dell'identità $e \in \text{Isom}(M)$. Se l'azione è propriamente discontinua $Z \cap G$ è finito. Quindi G ha un intorno di e finito, quindi e è isolato in G (i punti sono chiusi in $\text{Isom}(M)$). La moltiplicazione $x \mapsto gx$ per un elemento di G è un omeomorfismo e segue che tutti i punti di G sono isolati, cioè G è discreto. \square

¹Qui \times indica il prodotto semidiretto: come varietà $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ è diffeomorfa a $O(n) \times \mathbb{R}^n$, con un prodotto però diverso da quello diretto (ma pur sempre liscio).

Applichiamo questo risultato alla costruzione di rivestimenti fra varietà riemanniane. Per inquadrare bene la situazione, dimostriamo prima un fatto generale, che può essere riassunto dicendo che le strutture differenziabili e riemanniane possono essere “sollevate” lungo i rivestimenti.

PROPOSIZIONE 1.12. *Sia $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ un rivestimento fra spazi topologici. Se M è una varietà differenziabile (o riemanniana), allora \widetilde{M} ha un'unica struttura di varietà differenziabile (o riemanniana) tale che p sia un diffeomorfismo (o isometria) locale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $U \subset M$ un aperto banalizzante. Per “banalizzante” intendiamo che la sua controimmagine $p^{-1}(U)$ sia unione disgiunta di aperti U_i tali che $p|_{U_i}: U_i \rightarrow U$ sia un omeomorfismo per ogni i . A questo punto è sufficiente (e necessario) dare a ciascun U_i la struttura differenziabile o riemanniana di U trasportata tramite p . \square

Le strutture (differenziabili o riemanniane) non scendono con altrettanta facilità da \widetilde{M} a M . Consideriamo il caso in cui il rivestimento sia indotto dall'azione di un gruppo.

PROPOSIZIONE 1.13. *Sia G un gruppo che agisce in modo libero e propriamente discontinuo su una varietà differenziabile (riemanniana) M e $M \rightarrow M/G$ il rivestimento indotto. Esiste una struttura di varietà differenziabile (riemanniana) su M/G che rende la proiezione p un diffeomorfismo (isometria) locale se e solo se G è un gruppo di diffeomorfismi (isometrie) di M . Questa struttura, se esiste, è unica.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in M/G$ un punto e $U \ni x$ un intorno banalizzante; abbiamo quindi $p^{-1}(U) = \cup_{i \in I} U_i$ e $p|_{U_i}: U_i \rightarrow U$ omeomorfismo per ogni $i \in I$. Sia $i_0 \in I$ un indice qualsiasi. Otteniamo $p^{-1}(U) = \cup_{g \in G} g(U_{i_0})$. Per ottenere una struttura differenziabile (riemanniana) su U è necessario e sufficiente che gli aperti $g(U_{i_0})$ inducano tramite p la stessa struttura su U . Questo accade precisamente quando ogni g agisce come un diffeomorfismo (isometria). \square

COROLLARIO 1.14. *Sia $G < \text{Isom}(M)$ un gruppo di isometrie. Se G è discreto e agisce in modo libero il quoziente M/G è una varietà riemanniana e $p: M \rightarrow M/G$ un rivestimento ed una isometria locale.*

COROLLARIO 1.15. *Sia $G < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un gruppo discreto composto solo da isometrie iperboliche e paraboliche. Il quoziente M/G è una varietà iperbolica.*

DIMOSTRAZIONE. Le isometrie iperboliche e paraboliche agiscono in modo libero. Il quoziente è localmente isometrico a \mathbb{H}^n ed è quindi iperbolico. \square

1.5. Mappa sviluppante. D'ora in poi un rivestimento di varietà riemanniane sarà sempre implicitamente un rivestimento $p: M \rightarrow N$ fra varietà riemanniane che sia una isometria locale. Notiamo il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 1.16. *Sia $p: M \rightarrow N$ un rivestimento fra varietà riemanniane. Allora M è completa se e solo se N è completa.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema di Hopf-Rinow una varietà riemanniana è completa se e solo se le geodetiche esistono per ogni t . Supponiamo che N sia completa e mostriamo che anche M lo è. Sia γ una geodetica uscente da un punto

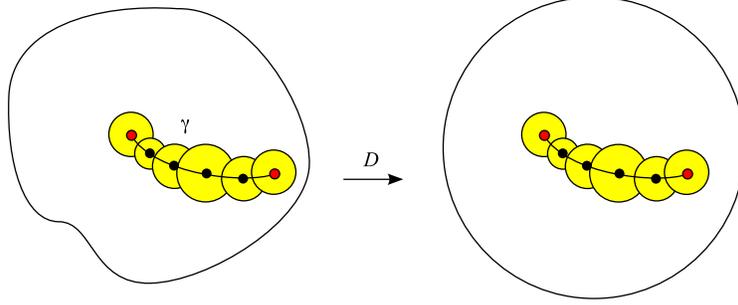


FIGURA 1. La mappa sviluppante.

$x \in M$ con direzione v . La geodetica $p \circ \gamma$ vive in N e quindi esiste per ogni t . L'unico sollevamento che coincide inizialmente con γ è una geodetica che esiste per ogni t , ed è proprio γ . Quindi γ esiste per ogni t e M è completa. Si dimostra in modo analogo che M completa implica N completa. \square

Se M è una varietà iperbolica non completa, il suo rivestimento universale \widetilde{M} è una varietà iperbolica semplicemente connessa non completa. Ad esempio, \widetilde{M} potrebbe essere un aperto semplicemente connesso contenuto dentro \mathbb{H}^n . Mostriamo che in generale esiste comunque una mappa naturale da \widetilde{M} in \mathbb{H}^n .

PROPOSIZIONE 1.17. *Sia \widetilde{M} una varietà iperbolica semplicemente connessa. Esiste una isometria locale*

$$D: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^n$$

detta sviluppante. Due isometrie locali da \widetilde{M} in \mathbb{H}^n sono ottenute l'una dall'altra tramite post-composizione con una isometria di \mathbb{H}^n . Se \widetilde{M} è completa allora D è una isometria.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto arbitrario $x \in \widetilde{M}$ e lo mandiamo in un punto arbitrario $D(x) \in \mathbb{H}^n$. Poiché \widetilde{M} è iperbolica, in ogni punto $y \in \widetilde{M}$ c'è un intorno U_y (che possiamo supporre essere un disco aperto centrato in y di raggio piccolo) isometrico ad un aperto (un disco) di \mathbb{H}^n . Estendiamo quindi D ad una isometria fra U_x e un disco aperto centrato in $D(x)$.

Mostriamo che la mappa $D: U_x \rightarrow \mathbb{H}^n$ si estende ad un'unica mappa $D: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^n$ che sia una isometria locale. Sia $y \in \widetilde{M}$ un punto arbitrario. Scegliamo un arco γ da x in y . Per compattezza esistono punti $x = x_1, \dots, x_k = y$ su γ tali che i dischi U_{x_1}, \dots, U_{x_k} ricoprono γ . Per ogni $i = 2, \dots, k$ esiste una unica estensione a $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_i}$ della mappa già definita su $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_{i-1}}$ che sia una isometria locale. Estendendo a questo modo definiamo $D(y)$. Si veda Fig. 1.

La definizione non dipende dalle scelte fatte perché \widetilde{M} è semplicemente connessa. Sia γ' un altro arco che collega x a y , da cui ricaviamo un'altra catena di aperti $U_{x'_1}, \dots, U_{x'_h}$. L'arco γ' è omotopo a estremi fissati con γ . È quindi facile vedere che le due catene di aperti sono ottenute l'una dall'altra da mosse elementari quali quella di sostituire due dischi consecutivi U_{x_i} e $U_{x_{i+1}}$ con tre dischi $U_{x_i}, U_{x_{i+\frac{1}{2}}}, U_{x_{i+1}}$ tali che $U_{x_i} \cap U_{x_{i+\frac{1}{2}}} \cap U_{x_{i+1}} \neq \emptyset$. Poiché l'intersezione dei tre è non vuota, è chiaro

che l'estensione ai primi due dischi è la stessa di quella ai secondi tre. Quindi D è ben definita.

La mappa D è unica quando è fissata al primo ordine in x . Quindi a meno di isometrie di \mathbb{H}^n è unica per il Corollario 2.7. Infine, supponiamo che \widetilde{M} sia completa. La mappa sviluppante D è una isometria locale. Ricordiamo che un omeomorfismo locale è promosso ad un rivestimento quando tutti i cammini possono essere sollevati. Il fatto che D sia un isometria locale e che \widetilde{M} sia completa implica facilmente che i cammini possono essere sollevati. Poiché \mathbb{H}^n è semplicemente connesso, il rivestimento D è in realtà un omeomorfismo e quindi una isometria. \square

Tutta questa sezione può essere riassunta nel risultato seguente.

TEOREMA 1.18. *Una varietà riemanniana completa è iperbolica se e solo se è isometrica a \mathbb{H}^n/G per un gruppo discreto G di isometrie composto solo da trasformazioni paraboliche, iperboliche e l'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Se G è discreto e contiene solo parabolici e iperbolici allora \mathbb{H}^n/G è iperbolica per il Corollario 1.15 e completa per la Proposizione 1.16.

D'altra parte, sia M una varietà iperbolica completa. Il suo rivestimento universale \widetilde{M} è una varietà iperbolica per la Proposizione 1.12 e completa per la Proposizione 1.16. Quindi è isometrico a \mathbb{H}^n per la Proposizione 1.17.

Il Corollario 1.7 implica che M è il quoziente di \mathbb{H}^n per l'azione di un gruppo $G = \text{Aut}(p)$ che deve essere un gruppo di isometrie per la Proposizione 1.13, discreto e senza punti fissi per la Proposizione 1.11. \square

OSSERVAZIONE 1.19. In modo analogo si mostra che ogni varietà ellittica o piatta è ottenuta come quoziente di S^n o \mathbb{R}^n per un gruppo discreto G di isometrie senza punti fissi.

COROLLARIO 1.20. *C'è una naturale corrispondenza biunivoca fra gli insiemi*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{varietà iperboliche complete} \\ \text{a meno di isometria} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sottogruppi discreti di } \text{Isom}(\mathbb{H}^n) \\ \text{senza elementi ellittici} \\ \text{a meno di coniugio} \end{array} \right\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo visto come ogni varietà iperbolica completa si realizza come \mathbb{H}^n/Γ per un gruppo Γ discreto di isometrie senza elementi ellittici (solo iperbolici o parabolici). L'unica arbitrarietà nel passaggio da M a Γ è la scelta di una isometria fra \widetilde{M} e \mathbb{H}^n . Ogni altra isometria si ottiene componendo quella scelta con un elemento $g \in \text{Isom}(M)$, ed il gruppo Γ cambia conseguentemente come coniugio rispetto a g . \square

1.6. Varietà piatte. Nelle sezioni precedenti abbiamo dimostrato che ogni varietà iperbolica, piatta o ellittica è costruita come quoziente di \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n o S^n per un gruppo discreto Γ di isometrie senza punti fissi. Mostriamo alcuni esempi importanti in questa sezione e le successive.

Una traslazione intera di \mathbb{R}^n è una traslazione $x \mapsto x + b$ di un vettore $b \in \mathbb{Z}^n$. Le traslazioni intere formano un sottogruppo discreto $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ isomorfo a \mathbb{Z}^n . Il quoziente \mathbb{R}^n/Γ è in modo naturale diffeomorfo al toro n -dimensionale:

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \cong \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$$

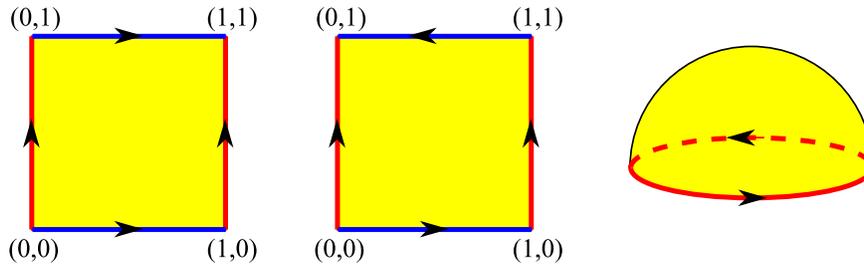


FIGURA 2. Due domini fondamentali in \mathbb{R}^2 per il toro (sinistra) e la bottiglia di Klein (centro): i punti nei lati opposti devono essere identificati come indicato dalle frecce. Un dominio fondamentale in S^2 per il piano proiettivo.

che è quindi dotato di una struttura di varietà riemanniana piatta. In dimensione $n = 2$ può essere agevole disegnare un dominio fondamentale per l'azione di Γ . La seguente definizione vale in generale.

DEFINIZIONE 1.21. Un *dominio fondamentale* per l'azione di un gruppo Γ su una varietà M è un chiuso connesso $D \subset M$ che interseca ogni orbita in almeno un punto, che sia la chiusura di un aperto \dot{D} che interseca ogni orbita in al più un punto.

In presenza di un dominio fondamentale D , lo spazio quoziente può essere ottenuto semplicemente quozientando D identificando i punti di ∂D che stanno sulla stessa orbita. Ad esempio un dominio fondamentale per Γ è il quadrato D mostrato in Fig. 2-(sinistra). Identificando i lati opposti si ottiene effettivamente un toro.

Fra le superfici piatte troviamo anche la *bottiglia di Klein* ottenuta prendendo come Γ il gruppo generato dalle isometrie seguenti:

$$\tau: (x, y) \mapsto (x + 1, y), \quad \eta: (x, y) \mapsto (1 - x, y + 1).$$

Un dominio fondamentale per la bottiglia di Klein è mostrato in Fig. 2-(centro). I sottogruppi $\langle \tau \rangle$ e $\langle \eta \rangle$ generati rispettivamente da τ e η sono entrambi isomorfi a \mathbb{Z} . Notiamo però che $\mathbb{R}^2 / \langle \tau \rangle$ è un cilindro infinito e $\mathbb{R}^2 / \langle \eta \rangle$ è un nastro di Möbius infinito. Essendo sottogruppi di Γ entrambi gli spazi rivestono la bottiglia di Klein.

Il sottogruppo di Γ generato dalle traslazioni τ e η^2 è isomorfo a \mathbb{Z}^2 ed ha indice due in Γ . La bottiglia di Klein ha infatti un rivestimento doppio isometrico ad un toro piatto. Il suo dominio fondamentale è un rettangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$.

1.7. Varietà ellittiche. Ogni varietà ellittica completa è quoziente di S^n , quindi è compatta e ha gruppo fondamentale finito.²

Un esempio importante è lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ che può essere ottenuto quozientando S^n tramite la mappa antipodale $i: v \mapsto -v$. In altre parole otteniamo $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ come quoziente del gruppo formato da due elementi $\{e, i\}$. La mappa antipodale è una isometria e quindi $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ eredita una struttura di varietà ellittica. Un emisfero è un dominio fondamentale, in Fig. 2-(destra) è mostrato il caso $n = 2$.

²Ogni rivestimento fra varietà compatte ha grado finito.

Troviamo altri esempi oltre allo spazio proiettivo in dimensione $n = 3$. Siano p e q due interi coprimi qualsiasi. Sia $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Identifichiamo \mathbb{R}^4 con \mathbb{C}^2 e vediamo S^3 come

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

La mappa

$$f(z, w) = (\omega z, \omega^q w)$$

è una isometria di \mathbb{R}^4 perché effettua contemporaneamente sui due piani ortogonali $w = 0$ e $z = 0$ due rotazioni di angolo $\frac{2\pi}{p}$ e $\frac{2\pi q}{p}$. La mappa f quindi è una isometria di S^3 . Inoltre ha ordine p e nessuna delle sue potenze f, f^2, \dots, f^{p-1} ha punti fissi. Infine il gruppo $\Gamma = \langle f \rangle$ generato da f è discreto perché è finito.

Il quoziente S^3/Γ è quindi una varietà ellittica avente gruppo fondamentale isomorfo a $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$. Tale varietà è detta *spazio lenticolare* ed è normalmente indicata con il simbolo $L(p, q)$.

1.8. Cuspidi. Non è sempre facile descrivere una varietà iperbolica costruendo esplicitamente un gruppo Γ di isometrie di \mathbb{H}^n , spesso si preferisce ricorrere a costruzioni più geometriche del tipo “taglia e incolla”, come vedremo dopo. Descriviamo qui comunque un esempio importante.

Visualizziamo \mathbb{H}^n con il modello del semispazio, usando le coordinate (x, t) con $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Sappiamo che ogni isometria $x \mapsto Ax + b$ di \mathbb{R}^{n-1} definisce una isometria $(x, t) \mapsto (Ax + b, t)$ di \mathbb{H}^n .

DEFINIZIONE 1.22. Sia $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^{n-1})$ un gruppo discreto di isometrie senza punti fissi. Il gruppo Γ agisce anche su \mathbb{H}^n ed il quoziente \mathbb{H}^n/Γ è detta *cuspid*.

Il quoziente $M = \mathbb{R}^{n-1}/\Gamma$ è una varietà piatta di dimensione $n - 1$, dotata di un tensore metrico g_M . La cuspid è quindi isometrica a $M \times \mathbb{R}_{>0}$ con tensore metrico in (x, t) dato da $\frac{g_M \oplus 1}{t^2}$.

OSSERVAZIONE 1.23. È più naturale parametrizzare la seconda coordinata t tramite lunghezza d’arco. Come abbiamo visto nella Proposizione 2.27 del capitolo precedente, una geodetica verticale con velocità unitaria è parametrizzata da $t = e^u$. Quindi usando u invece di t la cuspid è isometrica a $M \times \mathbb{R}$ con tensore $(e^{-2u} g_M) \oplus 1$. Muovendosi di livello u a velocità costante otteniamo quindi una contrazione del fattore M di tipo esponenziale.

Se $n = 2$ e Γ è il gruppo di isometrie generato da una traslazione $x \mapsto x + b$ la cuspid è diffeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}$. La circonferenza S^1 al tempo u è lunga e^{-2u} . Una porzione troncata di cuspid può essere visualizzata come superficie contenuta in \mathbb{R}^3 . Questa superficie è detta *pseudosfera* ed è mostrata in Fig. 3.

Topologicamente la cuspid è diffeomorfa a \mathbb{H}^2 meno un punto p , però non è isometrica a $\mathbb{H}^2 \setminus \{p\}$: quest’ultima varietà iperbolica infatti non è completa, mentre le cuspidi lo sono per la Proposizione 1.16.

Notiamo che una cuspid ha raggio di iniettività nullo. Più in generale vale il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 1.24. *Sia $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un gruppo discreto senza elementi ellittici. Se Γ contiene elementi parabolici allora la varietà iperbolica \mathbb{H}^n/Γ ha raggio di iniettività nullo.*



FIGURA 3. La pseudosfera è una superficie isometrica all'unione di due cuspidi troncate. Ogni punto ha curvatura gaussiana -1 .



FIGURA 4. Una sfera con 2 manici può essere rappresentata in vari modi.

DIMOSTRAZIONE. Un elemento parabolico $\gamma \in \Gamma$ ha spostamento minimo zero (si veda il Corollario 3.14 nel Capitolo 1). Esistono cioè punti di \mathbb{H}^n che vengono spostati in punti arbitrariamente vicini. Il raggio di iniettività nell'immagine di questi punti in \mathbb{H}^n/Γ deve quindi tendere a zero. \square

COROLLARIO 1.25. *Se $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ è varietà iperbolica compatta il gruppo Γ contiene solo l'identità e elementi iperbolici.*

DIMOSTRAZIONE. Il raggio di iniettività di una varietà compatta è positivo (Proposizione 1.19 nel Capitolo 1). \square

2. Spazio di Teichmüller

2.1. Classificazione delle superfici. Richiamiamo il teorema di classificazione delle superfici.

TEOREMA 2.1. *Ogni superficie compatta, connessa e orientabile è diffeomorfa alla superficie S_g ottenuta attaccando g manici alla sfera S^2 come indicato in Fig. 4- (sinistra).*

La caratteristica di Eulero di S_g è $\chi(S_g) = 2 - 2g$: le superfici S_g hanno caratteristica di Eulero differente e sono quindi effettivamente non diffeomorfe fra loro. Una superficie riemanniana è ovviamente una superficie dotata di un tensore metrico. Ad esempio, ogni superficie contenuta in \mathbb{R}^3 come le tre superfici mostrate in Fig. 4 ha un tensore metrico indotto da quello euclideo di \mathbb{R}^3 .

Come abbiamo visto nella Sezione 1.9 in ogni punto p di una superficie riemanniana S è definita una curvatura gaussiana $K_p \in \mathbb{R}$. Il famoso teorema di Gauss-Bonnet collega la curvatura alla caratteristica di Eulero di S :

TEOREMA 2.2 (Gauss-Bonnet). *Sia S una superficie compatta. Vale l'uguaglianza*

$$\int_S K_p = 2\pi\chi(S).$$

Ricordiamo una superficie riemanniana ellittica, euclidea, iperbolica ha curvatura gaussiana costante rispettivamente pari a 1, 0 e -1 . Il teorema di Gauss-Bonnet mostra in particolare che la sfera è l'unica superficie orientabile che può ammettere una metrica ellittica, il toro è l'unica che può ammettere una metrica piatta, e le altre superfici S_g con genere $g \geq 2$ sono le uniche che possono ammettere una metrica iperbolica. Abbiamo già visto che sfera e toro ammettono effettivamente una metrica (rispettivamente) ellittica e piatta. Costruiamo nelle prossime sezioni varie metriche iperboliche tutte le superfici orientabili di genere $g \geq 2$.

Notiamo inoltre che una superficie contenuta in \mathbb{R}^3 con curvatura costante deve avere curvatura positiva ed è quindi una sfera. Infatti è facile vedere che una superficie compatta contenuta in \mathbb{R}^3 ha sempre almeno un punto con curvatura positiva. Le metriche a curvatura costante -1 che costruiremo nelle prossime sezioni non saranno quindi visibili dentro \mathbb{R}^3 .

2.2. Varietà iperboliche con bordo geodetico. Come capita spesso in geometria, esiste una nozione di varietà iperbolica “a bordo” per cui continuano ad essere valide molte delle proprietà enunciate fin'ora.

Ricordiamo che una varietà differenziabile M con bordo è uno spazio topologico con carte in un semispazio fissato di \mathbb{R}^n invece che in \mathbb{R}^n . Gli atlanti sono sempre funzioni lisce. I punti corrispondenti al bordo del semispazio formano un sottoinsieme ∂M di M detto appunto *bordo*. Il bordo di una n -varietà è in modo naturale una $(n-1)$ -varietà senza bordo.

Possiamo definire lo spazio tangente T_x in modo naturale come un semi-spazio vettoriale. Con questa definizione molte nozioni geometriche della geometria riemanniana si estendono facilmente a varietà con bordo. Il bordo di una varietà riemanniana è in modo naturale una varietà riemanniana.

DEFINIZIONE 2.3. Una varietà iperbolica (ellittica, piatta) M a bordo geodetico è una varietà riemanniana con bordo in cui ogni punto ha un aperto isometrico ad un aperto di un semispazio fissato di \mathbb{H}^n (S^n , \mathbb{R}^n).

Il bordo ∂M di M è in modo naturale una varietà iperbolica (ellittica, piatta) senza bordo. La mappa esponenziale ed il raggio di iniettività inj_x di un punto $x \in \partial M$ sono definiti in modo analogo a quanto visto nella Sezione 1.6 del Capitolo 1, tenendo conto che lo spazio tangente T_x è in realtà un semispazio.

Due varietà con bordo geodetico isometrico possono essere incollate e generare così una nuova varietà. Più precisamente, siano M e N due varietà iperboliche (ellittiche, piatte) e $\psi: \partial M \rightarrow \partial N$ una isometria. Sia $M \cup_\psi N$ lo spazio topologico ottenuto quotizzando l'unione disgiunta $M \sqcup N$ per la relazione di equivalenza che identifica x con $\psi(x)$ per ogni $x \in \partial M$.

PROPOSIZIONE 2.4. *Lo spazio $M \cup_\psi N$ ha una naturale struttura di varietà iperbolica.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo su $M \cup_{\psi} N$ un atlante di aperti a valori in \mathbb{H}^n , tale che le funzioni di transizione siano tutte isometrie. Questo fornisce una struttura di varietà iperbolica.

I punti $M \cup_{\psi} N$ provenienti da punti interni di M o N sono dotati delle stesse carte in \mathbb{H}^n che avevano in $\text{int}(M)$ e $\text{int}(N)$. Consideriamo ora un punto proveniente da una identificazione $x \sim \psi(x)$ fra due punti $x \in M$ e $\psi(x) \in N$.

Il punto x ha un intorno in M isometrico ad una semi-palla $D \subset \mathbb{H}^n$ di raggio ϵ . Analogamente $\psi(x)$ ha un intorno in N isometrico ad una semi-palla $D' \subset \mathbb{H}^n$ di raggio ϵ . L'isometria $\psi: \partial M \rightarrow \partial N$ definisce una isometria fra le pareti geodetiche delle due palle. Questa isometria si estende in modo unico ad una isometria ψ' di \mathbb{H}^n tale che $\psi'(D) \cup D'$ sia una palla di raggio ϵ . Questa palla fornisce un intorno per x . Abbiamo così definito un atlante ed una metrica iperbolica su $M \cup_{\psi} N$. \square

Se M è una varietà iperbolica con bordo geodetico, lo è anche il suo rivestimento universale \widetilde{M} , e continua ad essere vero che M è completa se e solo se lo è \widetilde{M} . Inoltre è definita come nella Proposizione 1.17 una sviluppante $D: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^n$; l'unica novità qui è che D generalmente non è suriettiva, anche quando M è completa.

PROPOSIZIONE 2.5. *Sia \widetilde{M} una varietà iperbolica con bordo geodetico semplicemente connessa. Esiste una isometria locale*

$$D: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^n$$

detta sviluppante. Due isometrie locali da \widetilde{M} in \mathbb{H}^n sono ottenute l'una dall'altra tramite post-composizione con una isometria di \mathbb{H}^n . Se \widetilde{M} è completa allora D è una isometria sull'immagine $D(\widetilde{M})$, che è l'intersezione di alcuni semispazi di \mathbb{H}^n .

DIMOSTRAZIONE. La sviluppante è definita come nella Proposizione 1.17 (si veda la Fig. 1) e risulta sempre essere una isometria locale. Ristretta sull'immagine, la mappa è una isometria locale, e se \widetilde{M} è completa tutti i cammini possono essere sollevati: quindi è un rivestimento $D: \widetilde{M} \rightarrow D(\widetilde{M})$. Poiché \widetilde{M} è completa lo è anche $D(\widetilde{M})$, perché la completezza passa nei rivestimenti.

In particolare l'immagine $D(\widetilde{M})$ è una varietà a bordo geodetico in \mathbb{H}^n chiusa. Poiché è chiusa, il suo bordo è chiuso ed è necessariamente una unione di iperpiani. Quindi $D(\widetilde{M})$ è intersezione di semispazi. In particolare $D(\widetilde{M})$ è un sottoinsieme convesso di \mathbb{H}^n , quindi contrattile, quindi semplicemente connesso. Quindi il rivestimento $D: \widetilde{M} \rightarrow D(\widetilde{M})$ è in realtà un diffeomorfismo (e quindi una isometria). \square

Possiamo quindi identificare il rivestimento universale di una varietà iperbolica M con bordo geodetico con una intersezione di semispazi in \mathbb{H}^n come ad esempio in Fig. 5. I sottospazi sono generalmente in numero infinito.

Una superficie iperbolica (ellittica, piatta) compatta a bordo geodetico ha un bordo formato da un numero finito di geodetiche chiuse. Per tali superfici continua a valere il teorema di Gauss-Bonnet:

TEOREMA 2.6 (Gauss-Bonnet). *Sia S una superficie iperbolica (ellittica, piatta) compatta a bordo geodetico. Vale l'uguaglianza*

$$K \cdot \text{Area}(S) = \int_S K = 2\pi\chi(S)$$

dove $K = -1$ (rispettivamente $K = 1$, $K = 0$) è la curvatura di S .

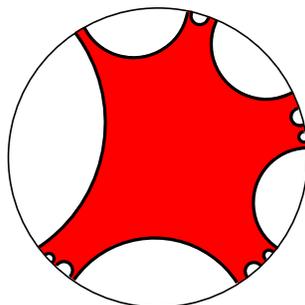


FIGURA 5. Il rivestimento universale di una superficie iperbolica con bordo geodetico è l'intersezione di un numero (generalmente infinito) di semipiani in \mathbb{H}^2 .

Ne deduciamo che una superficie iperbolica con bordo geodetico deve avere caratteristica di Eulero negativa.

Se il bordo non è geodetico esiste una formula di Gauss-Bonnet più generale in cui nel termine a sinistra compare un contributo dato dalla curvatura del bordo (che è zero precisamente quando è geodetico).

2.3. Pantaloni iperbolici. Un *pantalone* è una superficie compatta a bordo ottenuta rimuovendo tre piccoli dischi aperti da una sfera. Un pantalone ha caratteristica di Eulero -1 . Dimostriamo in questa sezione il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 2.7. *Dati tre numeri reali positivi $a, b, c > 0$ esiste (a meno di isometrie) un unico pantalone iperbolico con bordo geodetico, le cui curve di bordo abbiano lunghezza a, b e c .*

Per dimostrare questa proposizione avremo bisogno di studiare alcuni poligoni in \mathbb{H}^2 . Un *poligono* in \mathbb{H}^2 (o \mathbb{R}^2, S^2) è l'intersezione di un numero finito di semipiani, che sia compatta e con parte interna non vuota. Il bordo di un poligono è unione di un numero finito di segmenti (cioè porzioni compatte di retta) detti *lati*. Due segmenti consecutivi si intersecano in un punto detto *vertice* e definiscono un *angolo interno*. Un poligono è *retto* se gli angoli interni sono tutti retti.

Ad esempio Fig. 6-(sinistra) mostra un esagono retto. La proposizione seguente afferma che le lunghezze a, b, c mostrate in figura determinano tutto l'esagono.

LEMMA 2.8. *Dati tre numeri reali $a, b, c > 0$ esiste (a meno di isometrie) un unico esagono iperbolico retto che ha tre lati non adiacenti di lunghezza a, b e c .*

DIMOSTRAZIONE. Si costruisce l'esagono nel modo seguente. Si prenda come in Fig. 6-(destra) una retta in \mathbb{H}^2 e si fissa un segmento lungo x . Si tracciano due perpendicolari uscenti dai vertici del segmento. Dopo aver percorso due segmenti lunghi a e b si tracciano ancora due perpendicolari.

Se x è sufficientemente grande le due perpendicolari finali sono ultraparallele e quindi esiste un'unica retta perpendicolare ad entrambe. Questa retta chiude l'esagono con un segmento di una certa lunghezza $f(x)$ dipendente solo da x . Si vede facilmente che f è una funzione crescente ed assume tutti i valori reali positivi. Quindi esiste un unico x tale che $f(x) = c$ e la proposizione è dimostrata. \square

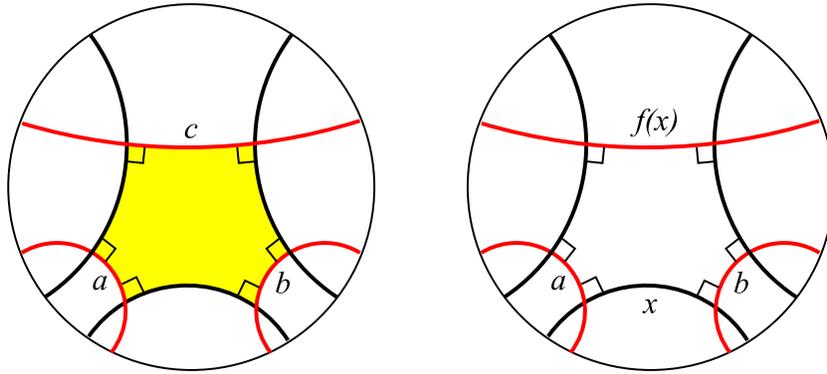


FIGURA 6. Un esagono retto con lati non adiacenti di lunghezza a , b e c (sinistra). L'esagono si costruisce prendendo un segmento lungo x in una retta arbitraria, tracciando due perpendicolari agli estremi lunghe a e b e tracciando due ulteriori perpendicolari. Se x è abbastanza grande le ultime due rette sono ultraparallele e a distanza $f(x)$. Esiste un solo x per cui $c = f(x)$.

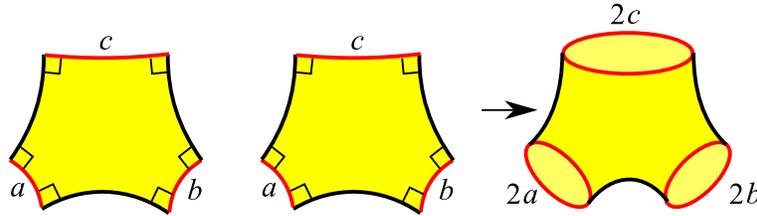


FIGURA 7. Incollando due esagoni lungo i lati neri si ottiene un pantalone iperbolico con bordo geodetico.

Incollando due esagoni con lati lunghi a, b, c come mostrato in Fig. 7 si costruiscono pantaloni iperbolici con curve di bordo lunghe $2a, 2b, 2c$. Per mostrare l'unicità di questi pantaloni abbiamo bisogno del fatto seguente.

LEMMA 2.9. *In un pantalone geodetico P , due componenti distinte di ∂P sono collegate da un'unica geodetica ortogonale a ∂P . Le tre geodetiche così ottenute sono disgiunte e dividono il pantalone in due esagoni retti.*

DIMOSTRAZIONE. Siano C_1, C_2, C_3 le componenti di ∂P e sia γ_i una curva di lunghezza minore fra tutte quelle che collegano C_j e C_k con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. La curva γ_i esiste perché P è compatto, ed è necessariamente una geodetica ortogonale ai bordi.

Le geodetiche γ_1, γ_2 e γ_3 sono disgiunte: supponiamo che γ_1 e γ_2 si intersechino in un punto p . Siano λ_1 e λ_2 le porzioni di γ_1 e γ_2 con estremi in p e C_3 . Possiamo supporre che $L(\lambda_1) \leq \lambda_2$. Modifichiamo allora γ_2 sostituendo il segmento λ_2 con λ_1 : otteniamo una curva che collega C_1 e C_3 avente al più la stessa lunghezza di γ_2 ma che non è geodetica (perché forma un angolo in p): assurdo.

Le tre geodetiche γ_1, γ_2 e γ_3 suddividono P in esagoni come in Fig. 8. Supponiamo infine per assurdo che esista un'altra geodetica γ'_1 oltre a γ_1 che sia ortogonale al bordo in C_2 e C_3 . Sia $x = \gamma'_1 \cap C_2$. Disegniamo γ'_1 in blu nei due esagoni in

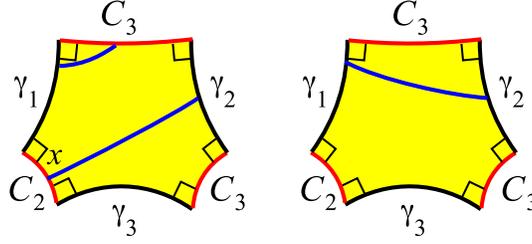


FIGURA 8. Una geodetica.

Fig. 8. La geodetica γ_1' esce da x e incontra necessariamente il lato opposto dell'esagono, cioè γ_2 . Se infatti incontrasse γ_1 o γ_3 formerebbe un triangolo con somma degli angoli interni superiore a π , che è impossibile in \mathbb{H}^2 , mentre se incontrasse C_3 formerebbe un quadrilatero retto, che è anch'esso impossibile. Ragionando in questo modo mostriamo che γ_1' deve intersecare alternativamente γ_2 e γ_1 (passando da un esagono all'altro) finché non incontra C_3 formando anche qui un triangolo con due angoli retti, che è assurdo. \square

Possiamo infine dimostrare il risultato principale di questa sezione.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 2.7. Abbiamo visto che con due esagoni retti si ottengono pantaloni iperbolici con lunghezze $2a, 2b, 2c$ delle geodetiche di bordo arbitrarie. D'altra parte, siano P e P' due pantaloni entrambi con lunghezze $2a, 2b, 2c$ al bordo. Il Lemma 2.9 mostra che P è unione di due esagoni incollati lungo tre geodetiche. I due esagoni hanno tre lati non adiacenti della stessa lunghezza, quindi sono isometrici per il Lemma 2.8, e quindi le lunghezze degli altri tre lati sono a, b e c . Lo stesso vale per P' . Tutti questi esagoni sono isometrici fra loro, e quindi lo sono anche P e P' . \square

Nella sezione precedente abbiamo visto che una superficie iperbolica con bordo geodetico deve avere caratteristica negativa. Adesso abbiamo gli strumenti per provare l'implicazione opposta, e cioè che ogni superficie connessa con bordo avente caratteristica di Eulero negativa ammette una metrica iperbolica.

Ricordiamo che S_g è la superficie compatta ottenuta attaccando g manici alla sfera come in Fig. 4. Indichiamo con $S_{g,b}$ la superficie con bordo ottenuta rimuovendo b dischi aperti disgiunti da S_g . La superficie $S_{g,b}$ dipende effettivamente (a meno di diffeomorfismo) solo dai valori g e b . La sua caratteristica di Eulero è

$$\chi(S_{g,b}) = 2 - 2g - b.$$

In particolare $S_{0,3}$ è un paio di pantaloni.

PROPOSIZIONE 2.10. *Se $\chi < 0$ allora $S_{g,b}$ si decompone in $-\chi = 2g + b - 2$ pantaloni.*

DIMOSTRAZIONE. Se $b = 0$ allora $g \geq 2$ e la superficie si decompone facilmente come mostrato in Fig. 9. Una decomposizione per $S_{g,b}$ può essere ottenuta a partire da una decomposizione per $S_{g,b-1}$ infilando un pantalone tra due pantaloni adiacenti (creando quindi una componente di bordo in più ma lasciando il genere g invariato). \square

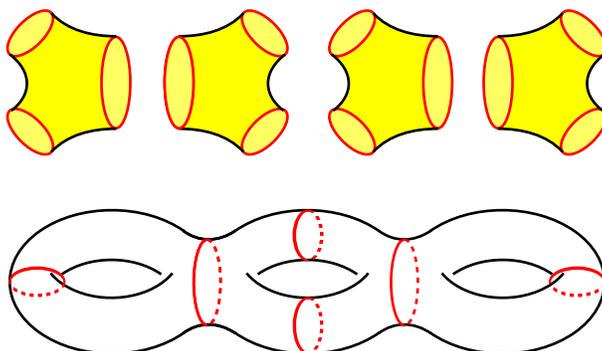


FIGURA 9. Incollando pantaloni si costruiscono tutte le superfici con bordo connesse di caratteristica di Eulero negativa. Qui è mostrata una decomposizione di S_3 .

COROLLARIO 2.11. *Se $\chi < 0$ allora $S_{g,b}$ ammette una metrica iperbolica.*

DIMOSTRAZIONE. Decomponiamo $S_{g,b}$ in pantaloni. Assegnamo un numero reale positivo arbitrario ad ogni curva semplice chiusa della decomposizione (ad esempio, le 6 curve rosse mostrate in Fig. 9). Assegnamo ad ogni pantalone l'unica metrica iperbolica le cui geodetiche di bordo hanno come lunghezze i numeri reali assegnati. Incolliamo quindi i pantaloni e otteniamo una metrica iperbolica per $S_{g,b}$. \square

Nella costruzione di una metrica iperbolica su $S_{g,b}$ abbiamo avuto molta libertà di scelta. Ad esempio, possiamo scegliere arbitrariamente le lunghezze delle geodetiche di bordo di $S_{g,b}$. Il resto di questo capitolo è essenzialmente dedicato allo studio delle differenti metriche iperboliche che possono essere assegnate ad una superficie compatta.

2.4. Geodetiche chiuse. Studiamo in questa sezione come si comportano le geodetiche chiuse in una superficie iperbolica (e in una varietà iperbolica di dimensione arbitraria). Una *geodetica chiusa* in una varietà riemanniana M è una mappa liscia $S^1 \rightarrow M$ che sia localmente una geodetica con velocità non nulla.

Se X e Y sono due spazi topologici, il simbolo $[X, Y]$ indica l'insieme delle mappe continue da X in Y , viste a meno di omotopia. Consideriamo qui il caso $X = S^1$ ed enunciamo un teorema di topologia.

PROPOSIZIONE 2.12. *Sia Y uno spazio connesso per archi e y_0 un punto base. La mappa naturale*

$$F: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow [S^1, Y]$$

induce una corrispondenza biunivoca fra classi di coniugio di $\pi_1(Y, y_0)$ e $[S^1, Y]$.

DIMOSTRAZIONE. Un elemento di $\pi_1(Y, y_0)$ è rappresentato da un laccio $\alpha: S^1 \rightarrow Y$ con punto base $\alpha(1) = y_0$ ed induce ben definito un elemento di $[S^1, Y]$. La mappa F così definita è suriettiva, perché qualsiasi mappa da S^1 in Y può essere omotopata in modo da passare per y_0 .

Inoltre due lacci α, α' con punto base $\alpha(1) = \alpha'(1) = y_0$ inducono lo stesso elemento in $[S^1, Y]$ se e solo se esiste una omotopia $H: S^1 \times [0, 1] \rightarrow Y$ che si restringa a α e α' quando ristretta in 0 e 1. L'omotopia è libera: la curva $\gamma: t \mapsto$

$H(1, t)$ non è costantemente ferma in y_0 , ma forma un altro laccio che parte e torna in y_0 . L'omotopia H induce facilmente una omotopia a estremi fissati fra α e $\gamma^{-1} \circ \alpha' \circ \gamma$. In altre parole, $F(\alpha) = F(\alpha')$ se e solo se α e α' sono coniugate. \square

Se $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ è una varietà iperbolica completa, gli elementi di $[S^1, M]$ sono in corrispondenza biunivoca con le classi di coniugio di Γ . Due elementi coniugati di Γ sono dello stesso tipo (banale, parabolico o iperbolico) e hanno lo stesso spostamento minimo. Quindi ogni elemento di $[S^1, M]$ è di un tipo ben definito (banale, parabolico o iperbolico) e ha uno spostamento minimo d (si veda la Sezione 3.5 nel Capitolo 1)

PROPOSIZIONE 2.13. *Un elemento iperbolico di $[S^1, M]$ è rappresentato da un'unica geodetica chiusa, di lunghezza d pari al suo spostamento minimo. Gli elementi banale e parabolici non sono rappresentati da geodetiche chiuse.*

DIMOSTRAZIONE. Una isometria iperbolica $g \in \Gamma$ ha un'unica geodetica invariante, l'asse, che si proietta su una geodetica chiusa di M di lunghezza d . Due isometrie coniugate determinano la stessa geodetica. Due isometrie non coniugate invece determinano geodetiche non omotope per la Proposizione 2.12.

D'altra parte, se γ è una curva geodetica, fissando un punto base $x_0 \in \mathbb{H}^n$ con $p(x_0) \in \gamma$ la curva γ determina un elemento in $\pi_1(M, p(x_0)) = \Gamma$ cioè una isometria g che preserva γ . Le uniche isometrie che preservano una geodetica sono le iperboliche, e la geodetica è l'asse. \square

È possibile usare questo risultato per dimostrare un fatto non banale riguardante la topologia delle superfici. Ricordiamo che una *isotopia ambiente* in una varietà M è una mappa liscia $F: M \times [0, 1] \rightarrow M$ tale che $F_0 = \text{id}_M$ e ogni livello $F_t: M \rightarrow M$ sia un diffeomorfismo, dove si intende ovviamente $F_t = F(\cdot, t)$.

COROLLARIO 2.14. *Siano γ_1, γ_2 due curve semplici chiuse omotopicamente non banali e disgiunte in una superficie compatta S (con o senza bordo). Le due curve sono omotope se e solo se esiste una isotopia ambiente che sposta γ_1 in γ_2 .*

DIMOSTRAZIONE. Tagliamo la superficie lungo le due curve γ_1 e γ_2 . Otteniamo un certo numero di superfici con bordo (al massimo tre). Nessuna di queste superfici ha caratteristica di Eulero χ positiva, altrimenti dovrebbe essere un disco e il suo bordo γ_1 o γ_2 sarebbe omotopicamente banale. Se una superficie ha caratteristica χ zero, allora è un anello $S^1 \times [0, 1]$ e le sue due componenti di bordo sono necessariamente γ_1 e γ_2 : possiamo usare l'anello per costruire facilmente una isotopia ambiente che sposta γ_1 su γ_2 .

Altrimenti restiamo con superfici tutte con $\chi < 0$. Come mostrato nel Corollario 2.11, queste superfici possono essere decomposte in pantaloni iperbolici che inducono una struttura iperbolica su S in cui γ_1 e γ_2 sono geodetiche distinte. Quindi γ_1 e γ_2 non sono omotope per la Proposizione 2.4, contro le ipotesi. \square

Ridimostreremo fra poco lo stesso risultato eliminando l'ipotesi che γ_1 e γ_2 siano disgiunte. Notiamo che una geodetica chiusa non è necessariamente semplice.

PROPOSIZIONE 2.15. *Sia γ una geodetica chiusa in una varietà riemanniana M . Vale uno (ed uno solo) dei fatti seguenti.*

- (1) la curva γ è semplice,
- (2) la curva γ si autointerseca trasversalmente in un numero finito di punti,

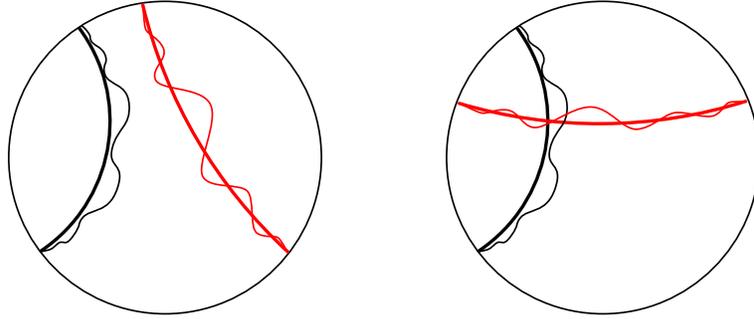


FIGURA 10. Curve e rette hanno distanza uniformemente limitata e tendono quindi agli stessi punti al bordo (sinistra). Se due geodetiche si intersecano allora anche le curve a loro omotope si intersecano (destra).

(3) la curva γ percorre una curva di tipo (1) o (2) un numero $k \geq 2$ di volte.

DIMOSTRAZIONE. Se la curva non è semplice, deve autointersecarsi. Se lo fa solo con tangenti diverse vale (2). Se lo fa con le stesse tangenti vale (3). \square

Il punto (3) equivale a dire che $\gamma(e^{it}) = \eta(e^{kit})$ per una geodetica η e $k \geq 2$. In una superficie delle curve semplici chiuse disgiunte non omotope hanno però comunque rappresentanti geodetici semplici e disgiunti.

PROPOSIZIONE 2.16. *Sia S una superficie iperbolica completa, con o senza bordo. Siano $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ delle curve semplici chiuse di tipo iperbolico, tali che γ_i e γ_j siano disgiunte e non omotope (neppure cambiandone l'orientazione) per ogni $i \neq j$.*

Allora le geodetiche $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_k$ omotope a queste curve sono anch'esse semplici e disgiunte. Esiste inoltre una isotopia ambiente che sposta le γ_i nelle $\bar{\gamma}_i$.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo innanzitutto che ogni $\bar{\gamma}_i$ è semplice. Ricordiamo che il rivestimento universale \tilde{S} di S è isometrico ad un dominio contenuto in \mathbb{H}^2 (e coincide con \mathbb{H}^2 se $\partial S = \emptyset$). La controimmagine di $\bar{\gamma}_i$ nel rivestimento universale è necessariamente unione di rette. La controimmagine di γ_i è unione di curve, per ipotesi semplici e disgiunte. L'omotopia fra γ_i e $\bar{\gamma}_i$ si solleva ad una omotopia fra queste curve e queste rette. Poiché l'omotopia fra γ_i e $\bar{\gamma}_i$ ha dominio compatto, esiste $M > 0$ tale che ogni punto viene spostato meno di M . Quindi ogni sollevamento di γ_i è interamente contenuto nel M -intorno di un sollevamento di $\bar{\gamma}_i$, che è una retta. Un M -intorno di una retta nel modello del disco D^n è mostrato in figura. Il sollevamento di γ_i è costretto a stare in questo intorno e quindi tende agli stessi punti all'infinito delle rette come in Fig. 10-(sinistra).

Se $\bar{\gamma}_i$ non è semplice, si autointerseca in un numero finito di punti oppure avvolge $k \geq 2$ volte un'altra geodetica η . Nel primo caso, almeno due delle rette in \mathbb{H}^2 si intersecano come in Fig. 10-(destra). Le corrispondenti curve omotope hanno gli stessi punti all'infinito delle rette e quindi si devono intersecare (perché i loro punti all'infinito sono "allacciati"): assurdo.

Resta da considerare il caso $\bar{\gamma}_i(e^{it}) = \eta(e^{ikt})$ per una geodetica semplice η . Rappresentiamo una retta controimmagine di $\bar{\gamma}_i$ nel modello del semipiano come retta verticale. Abbiamo $S = \tilde{S}/\Gamma$ e siano $g, g^k \in \Gamma$ le isometrie che lasciano fissa

figura bananae

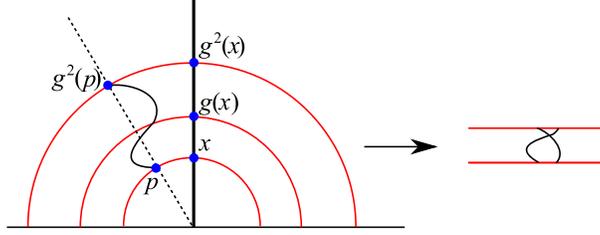


FIGURA 11. Una curva semplice chiusa in una superficie deve essere primitiva nel gruppo fondamentale.

questa retta e la quozientano alle geodetiche η e $\bar{\gamma}_i$. Sia x un punto arbitrario sulla retta. In Fig. 11-(destra) è mostrato il caso $k = 2$. La curva γ_i interseca la retta ortogonale a x in (almeno) un punto p . Un sollevamento di γ_i parte da p e finisce in $g^2(p)$. Come si vede in figura, quozientando rispetto a g si ottiene necessariamente una curva che si interseca. Quindi γ_i non è semplice, contrariamente alle ipotesi.

Mostriamo che $\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j = \emptyset$. Il fatto che γ_i non sia omotopa a γ_j neppure dopo un cambio di orientazione esclude che $\bar{\gamma}_i$ e $\bar{\gamma}_j$ abbiano lo stesso supporto. Quindi si intersecano trasversalmente in un numero finito di punti, e la dimostrazione prosegue esattamente come prima: se $\bar{\gamma}_i$ interseca $\bar{\gamma}_j$ allora γ_i interseca γ_j .

Mostriamo infine che è possibile trasformare le curve γ_i nelle geodetiche $\bar{\gamma}_i$ simultaneamente tramite una isotopia ambiente. Se $\cup_i \gamma_i$ e $\cup_j \bar{\gamma}_j$ siano insiemi disgiunti, concludiamo utilizzando più volte il Corollario 2.14: spostiamo con una isotopia ambiente la curva γ_1 su $\bar{\gamma}_1$, quindi tagliamo la superficie lungo questa curva e spostiamo con una isotopia ambiente γ_2 su $\bar{\gamma}_2$, etc.

Se gli insiemi $\cup_i \gamma_i$ e $\cup_j \bar{\gamma}_j$ non sono disgiunti, a meno di perturbare $\cup_i \gamma_i$ (con una isotopia ambiente) possiamo supporre che si intersechino trasversalmente in un numero finito di punti. Costruiamo quindi una isotopia ambiente che separi $\cup_i \gamma_i$ da $\cup_i \bar{\gamma}_i$ nel modo seguente. Poiché i due insiemi di curve non sono disgiunti, anche le loro preimmagini in \mathbb{H}^2 si intersecano trasversalmente in vari punti.

Consideriamo due sollevamenti che si intersecano, uno è una retta e l'altro è una curva omotopa ad una retta. Poiché esiste una omotopia che separa $\cup_i \gamma_i$ da $\cup_i \bar{\gamma}_i$, i punti all'infinito della retta e della curva non sono allacciati: quindi le due curve si intersecano più di una volta. È facile vedere che questo implica l'esistenza di un bigono come quello mostrato in Fig. 12.

È facile (ma non scontato!) dimostrare che la proiezione di un bigono in \mathbb{H}^2 è un bigono analogo nella superficie S , come in Fig. 12. A questo punto con una semplice isotopia ambiente si può far scivolare la curva γ_i mostrata in modo da eliminare il bigono in S e ridurre il numero di intersezioni fra $\cup_i \gamma_i$ e $\cup_j \bar{\gamma}_j$. Si procede quindi per induzione sul numero di intersezioni e con una isotopia si ottiene $(\cup_i \gamma_i) \cap (\cup_j \bar{\gamma}_j) = \emptyset$. Possiamo quindi concludere. \square

COROLLARIO 2.17. *Due curve semplici chiuse omotopicamente non banali in una superficie compatta sono omotope se e solo se sono isotope.*

DIMOSTRAZIONE. Una curva semplice omotopicamente non banale in una superficie compatta è di tipo iperbolico ed è quindi isotopa ad un'unica geodetica

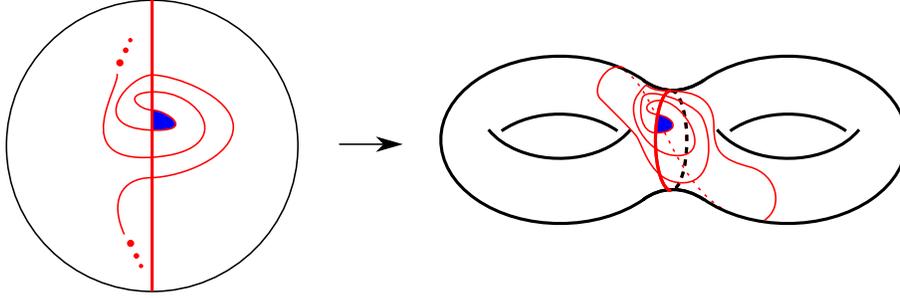


FIGURA 12. Se γ_i e $\bar{\gamma}_i$ si intersecano trasversalmente, in \mathbb{H}^2 si trova sempre un bigono come quello evidenziato, che si proietta su un bigono nella superficie S . Il bigono può essere eliminato facilmente con isotopia ambiente che riduce il numero di intersezioni fra γ_i e $\bar{\gamma}_i$.

semplice. Due curve omotope sono isotope alla stessa geodetica, e quindi sono isotope fra loro. \square

2.5. Spazio di Teichmüller. In questa sezione studiamo le metriche iperboliche che possono essere assegnate ad una data superficie $S_{g,b}$ di genere g e con b componenti di bordo avente caratteristica di Eulero $\chi(S_g) = 2 - 2g - b$ negativa.

Fissiamo una decomposizione in $-\chi = 2g + b - 2$ pantaloni per $S_{g,b}$. Le curve semplici chiuse della decomposizione sono tre per pantalone, meno quelle che non giacciono sul bordo che vengono contate due volte: in totale sono $3g - 3 + 2b$, di cui b sul bordo. Come abbiamo visto nel Corollario 2.11, se assegnamo a ciascuna curva un numero reale positivo, possiamo rappresentare ogni pantalone come l'unico pantalone iperbolico avente lunghezze di bordo proprio i tre numeri fissati. Pantaloni adiacenti hanno bordi della stessa lunghezza, quindi isometrici, e possono essere incollati. In questo modo si costruisce una metrica iperbolica su S_g . Nella costruzione abbiamo avuto $3g - 3 + 2b$ gradi di libertà.

Nell'incollare due pantaloni adiacenti abbiamo inoltre scelto una isometria fra due geodetiche chiuse: le isometrie possibili formano il gruppo di Lie S^1 . Otteniamo quindi un grado di libertà supplementare per ogni curva interna. In totale contiamo quindi

$$(3g - 3 + 2b) + (3g - 3 + b) = 6g - 6 + 3b = -3\chi(S_{g,b})$$

gradi di libertà. Vediamo adesso che i gradi di libertà sono effettivamente questi. Per chiarire rigorosamente questo fatto introduciamo due definizioni importanti.

DEFINIZIONE 2.18. Lo spazio dei moduli di $S_{g,b}$ è lo spazio delle metriche iperboliche su $S_{g,b}$ viste a meno di isometria.

Lo spazio di Teichmüller di $S_{g,b}$ è lo spazio delle metriche iperboliche su $S_{g,b}$, viste a meno di isometrie isotope all'identità.

Ricordiamo che una isotopia fra due diffeomorfismi di una varietà M è una mappa liscia $M \times [0, 1] \rightarrow M$ che collega i due diffeomorfismi in cui ogni livello t definisce un diffeomorfismo.³ In particolare l'isotopia deve preservare ogni componente di bordo (come insieme, non puntualmente).

³In una omotopia non si chiede che ogni livello t definisca un diffeomorfismo.

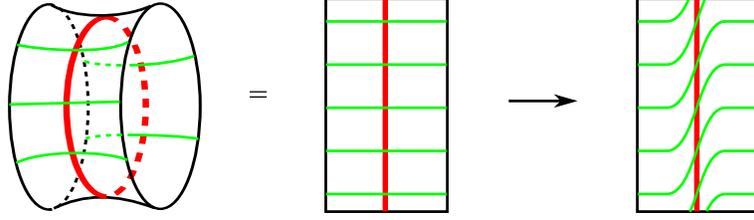


FIGURA 13. L' ϵ -intorno di una geodetica γ , per ϵ sufficientemente piccolo, ha una naturale struttura prodotto $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$. Per definire una torsione lungo γ si definisce una funzione che modifica i segmenti orizzontali come mostrato in figura.

Lo spazio dei moduli è a prima vista l'oggetto più naturale da studiare. Lo spazio di Teichmüller ha però una naturale topologia che lo rende (come vedremo) omeomorfo a $\mathbb{R}^{-\chi(S_{g,b})}$, mentre lo spazio dei moduli risulta essere topologicamente più complicato. Si preferisce quindi generalmente studiare innanzitutto lo spazio di Teichmüller, e quindi vedere lo spazio dei moduli come un quoziente di questo.

2.6. Terremoti. Sia h una metrica su una superficie orientata qualsiasi S (con o senza bordo) e $\gamma \subset S$ una geodetica semplice chiusa interna, che non sia cioè una componente di bordo. Sia θ un numero reale arbitrario. Come abbiamo accennato sopra, è possibile *torcere* la metrica h di un angolo θ intorno a γ . Informalmente possiamo pensare di far scivolare una delle due componenti adiacenti a γ di un angolo θ in senso antiorario.

Introduciamo questa operazione in modo più formale. Prendiamo un ϵ -intorno di γ , cioè l'insieme dei punti di S a distanza minore o uguale di ϵ da γ . Per ϵ sufficientemente piccolo questo intorno ha una naturale struttura prodotto $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$ dove $S^1 \times 0$ è γ e $p \times [-\epsilon, \epsilon]$ è un segmento lungo 2ϵ ortogonale a γ nel punto $p \in \gamma$ orientato in modo che $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$ abbia la stessa orientazione di S . Si veda Fig. 13-(sinistra).

Adesso scegliamo un diffeomorfismo φ di $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$ che incurvi i segmenti come mostrato in Fig. 13-(destra) di un angolo θ . Più precisamente, sia $f: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia che valga zero in $[-\epsilon, -\frac{\epsilon}{2}]$ e θ in $[\frac{\epsilon}{2}, \epsilon]$. Sia φ il diffeomorfismo definito da $\varphi(e^{i\alpha}, t) = (e^{i(\alpha+f(t))}, t)$.

Possiamo definire formalmente una nuova metrica h_θ su S nel modo seguente: il tensore metrico h_θ coincide con h in tutti i punti di S esterni all'intorno $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$, mentre coincide su $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$ con il tensore φ^*h ottenuto trasportando h lungo φ^{-1} . L'operazione che modifica h in h_θ è detta *terremoto*.

PROPOSIZIONE 2.19. *Il tensore metrico h_θ è ben definito e produce effettivamente una metrica iperbolica che dipende solo da γ e θ a meno di isometrie isotope all'identità.*

DIMOSTRAZIONE. C'è solo da notare che su $S^1 \times [\frac{\epsilon}{2}, \epsilon]$ i tensori h e h_θ in realtà coincidono, perché la mappa $(e^{i\alpha}, t) \mapsto (e^{i(\alpha+\theta)}, t)$ è una isometria di $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$. Quindi h_θ si incolla bene ed è ovviamente iperbolica.

Nella definizione di h_θ abbiamo scelto una funzione f in modo arbitrario. Se scegliamo un'altra funzione f' , il diffeomorfismo di S che è l'identità fuori da $S^1 \times$

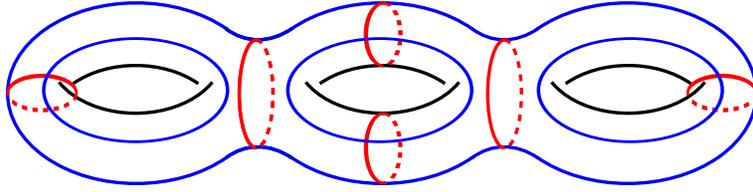


FIGURA 14. Un sistema di riferimento per lo spazio di Teichmüller: 6 curve rosse che dividono S_3 in pantaloni e 4 curve blu che suddividono ulteriormente ogni pantalone in due esagoni.

$[-\epsilon, \epsilon]$ e manda $(e^{i\alpha}, t)$ in $(e^{i(\alpha+f(t)-f'(t))}, t)$ è una isometria fra le due metriche isotopa all'identità. \square

Per fissare una bigezione fra lo spazio di Teichmüller e $\mathbb{R}^{-3\chi(S_{g,b})}$ è necessario fissare un “sistema di riferimento”.⁴ Un sistema di riferimento in questo contesto è il dato seguente:

- (1) una decomposizione di $S_{g,b}$ in pantaloni, cioè $3g - 3 + b$ curve semplici chiuse disgiunte che decompongano S_g in pantaloni;
- (2) altre curve semplici disgiunte trasverse alle precedenti, che decompongano i pantaloni in esagoni.

Un esempio è mostrato in Fig. 14. Quando la superficie è a bordo, alcune curve di tipo (2) sono archi con estremi in $\partial S_{g,b}$.

TEOREMA 2.20. *Un sistema di riferimento per $S_{g,b}$ induce una bigezione fra $\text{Teich}(S_{g,b})$ e $\mathbb{R}^{-3\chi(S_{g,b})} = \mathbb{R}^{6g-6+3b}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia S_g dotata di una metrica (cioè di un tensore metrico) iperbolica h : mostriamo come calcolare $6g - 6 + 3b$ valori reali a partire da h . Le $3g - 3 + b$ curve in (1) più le b curve di bordo sono a coppie disgiunte e non omotope. Per la Proposizione 2.16 esiste una isotopia ambiente che sposta queste curve in $3g - 3 + 2b$ geodetiche univocamente determinate. Le lunghezze di queste geodetiche formano le prime $3g - 3 + 2b$ coordinate. Le componiamo con un logaritmo naturale per avere valori in tutto \mathbb{R} .

Determiniamo le seconde $3g - 3 + b$ coordinate. Consideriamo una delle $3g - 3 + b$ geodetiche chiuse interne γ . In Fig. 17-(sinistra) sono mostrati i due pantaloni geodetici adiacenti a γ (che potrebbero anche coincidere). Consideriamo i due archi blu λ, λ' che intersecano γ e che collegano rispettivamente le geodetiche α, β e δ, η come in figura: scegliamone uno, ad esempio λ . Fissiamo un sollevamento del punto $\gamma \cap \lambda$ in \mathbb{H}^2 e da lì solleviamo γ ad una geodetica $\tilde{\gamma}$ e λ ad una curva $\tilde{\lambda}$ che collega due sollevamenti $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ di α e β . Si veda la Fig. 17-(destra).

Si tracciano come in figura le uniche ortogeodetiche che connettono $\tilde{\gamma}$ a $\tilde{\alpha}$ e a $\tilde{\beta}$. Il parametro di torsione associato a γ è la lunghezza t del segmento di $\tilde{\lambda}$ compreso tra le due ortogeodetiche. La lunghezza t è da considerare con segno: il segno è positivo se (come in figura) un osservatore che cammina lungo una ortogeodetica diretto verso $\tilde{\gamma}$ vede l'altra ortogeodetica a sinistra. Scegliendo λ' al posto di λ avremmo trovato lo stesso parametro t , come mostrato in Fig. 16.

⁴Allo stesso modo, per fissare un isomorfismo fra uno spazio vettoriale reale di dimensione n e \mathbb{R}^n è necessario fissare una base.

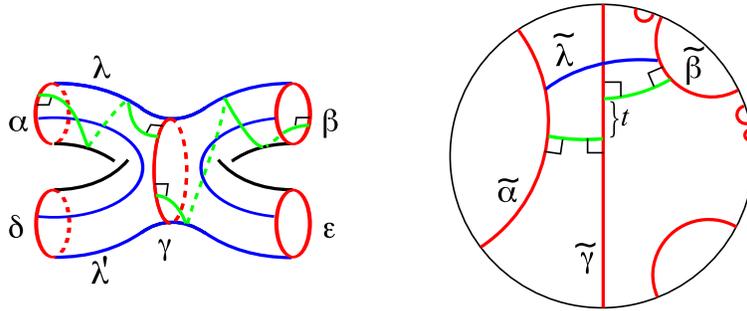


FIGURA 15. Una geodetica γ con i due pantaloni adiacenti. Il parametro t misura la distanza (nel rivestimento universale) fra due ortogeodetiche.

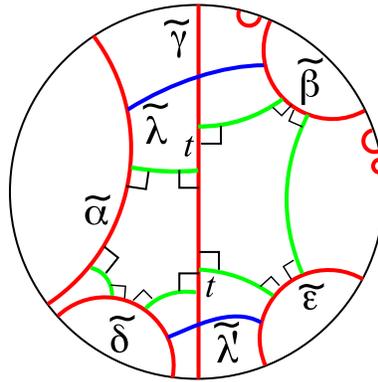


FIGURA 16. Scegliendo λ' invece di λ troviamo lo stesso parametro t , che misura lo sfasamento fra due esagoni retti, i cui lati giacenti su $\tilde{\gamma}$ sono entrambi della stessa lunghezza $\frac{l(\gamma)}{2}$, dove $l(\gamma)$ è la lunghezza di γ .

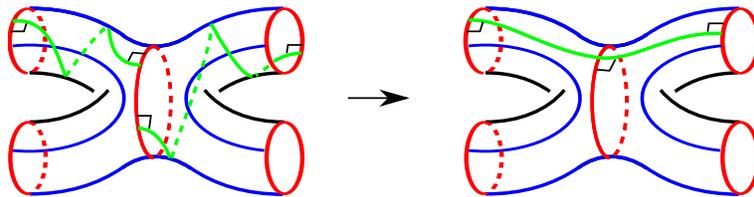


FIGURA 17. Una torsione di un opportuno angolo θ permette di far combaciare le curve verdi minimizzando le intersezioni con le curve blu.

Come parametro si preferisce usare invece della lunghezza t l'angolo $\theta = \frac{2\pi t}{l(\gamma)}$, dove $l(\gamma)$ è la lunghezza di γ . Abbiamo associato in questo modo ad ogni curva γ_i della decomposizione un angolo θ_i . Se torciamo la metrica su ogni geodetica γ_i dell'angolo θ_i otteniamo una nuova metrica iperbolica in cui tutte le ortogeodetiche combaciano come in Fig. 17-(destra) e se attaccate tutte insieme danno luogo a

geodetiche chiuse nella superficie isotope alle curve verdi di tipo (2). I parametri θ_i indicano quindi in un certo senso la distanza da questa configurazione particolare, determinata dal sistema di riferimento scelto.

Abbiamo definito una funzione $F: \text{Teich}(S_{g,b}) \rightarrow \mathbb{R}^{6g-6+3b}$. La funzione è suriettiva: incollando pantaloni possiamo costruire metriche in cui le $3g-3+2b$ geodetiche hanno valori arbitrari, e con dei terremoti è possibile variare arbitrariamente le torsioni. D'altra parte la F è anche iniettiva: \square

finire

2.7. Superfici di Riemann. Una superficie è una varietà reale bidimensionale; come a \mathbb{R}^2 può essere data la struttura complessa \mathbb{C} , è naturale tentare di definire su una superficie una struttura di “varietà complessa unidimensionale”. Una tale struttura si definisce facilmente, ed è effettivamente presente su tutte le superfici orientabili. Ciò che è più sorprendente è il fatto che, pur essendo definite con linguaggi e strumenti molto differenti, esista una naturale corrispondenza biunivoca fra strutture complesse e strutture riemanniane con curvatura costante. Prima di studiare questa corrispondenza iniziamo con una importante definizione. Ricordiamo che un *biolomorfismo* fra aperti di \mathbb{C} è una funzione olomorfa biunivoca (la cui inversa è necessariamente olomorfa).

DEFINIZIONE 2.21. Una *superficie di Riemann* è una varietà complessa di dimensione uno. In altre parole, è uno spazio topologico dotato di un atlante con carte in aperti di \mathbb{C} , le cui funzioni di transizione siano biolomorfismi.

Notiamo che la definizione è analoga a quella di varietà differenziabile, con \mathbb{C} al posto di \mathbb{R}^n e con i biolomorfismi al posto dei diffeomorfismi. Poiché \mathbb{C} è identificabile con \mathbb{R}^2 , una superficie di Riemann ha in particolare una struttura di superficie differenziabile. Una superficie di Riemann non è però dotata di una struttura riemanniana (purtroppo la notazione può prestarsi a fraintendimenti: il matematico Riemann è citato per due strutture nettamente differenti).

Una mappa $f: X \rightarrow Y$ fra superfici di Riemann è *olomorfa* se lo è letta sulle carte.⁵ Una mappa olomorfa biunivoca con inversa olomorfa è ovviamente un *biolomorfismo*.

Un qualsiasi aperto di \mathbb{C} è in modo naturale una superficie di Riemann. La retta proiettiva complessa $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ con le carte standard è una superficie di Riemann, detta *sfera di Riemann*. Un risultato molto importante riguardante le superfici di Riemann è il seguente. Indichiamo con $D \subset \mathbb{C}$ il disco aperto di raggio unitario.

TEOREMA 2.22 (uniformizzazione di Riemann). *Una superficie semplicemente connessa è biolomorfa a \mathbb{C} , a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ oppure a D .*

I tre modelli citati non sono biolomorfi fra loro. La sfera di Riemann $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ è compatta e quindi non è neppure omeomorfa agli altri due modelli \mathbb{C} e D . I due modelli \mathbb{C} e D sono invece distinti dal teorema di Liouville: su \mathbb{C} non esistono funzioni olomorfe a valori in \mathbb{C} non costanti e limitate, mentre su D esistono eccome, ad esempio la funzione $z \mapsto \frac{2}{z}$.

COROLLARIO 2.23. *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto proprio semplicemente connesso. Allora U è biolomorfo a D .*

⁵Anche qui, definizione analoga a quella di “funzione differenziabile” per le varietà differenziabili.

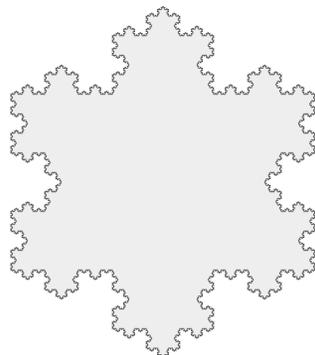


FIGURA 18. La parte interna del fiocco di neve di Koch è biolomorfa al disco aperto D .

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di uniformizzazione U è biolomorfo a D oppure \mathbb{C} . Il teorema di Liouville però non vale su U : il fatto che U sia semplicemente connesso implica che il complementare $\mathbb{C} \setminus U$ ha parte interna V non vuota. Basta quindi scegliere un punto $z_0 \in V$ e prendere la funzione $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$, limitata su U e non costante. \square

Notiamo che il fatto stesso che U sia omeomorfo a D è un fatto tutt'altro che banale. Il teorema è valido anche quando D non ha un bordo liscio, come in Fig. 18. Il teorema di uniformizzazione caratterizza completamente le superfici di Riemann semplicemente connesse e si può quindi dimostrare un teorema analogo al Teorema 1.18 per le varietà iperboliche.

TEOREMA 2.24. *Una superficie di Riemann è biolomorfa a X/G con $X \in \{\mathbb{C}, \mathbb{CP}^1, D\}$ e G gruppo di biolomorfismi che agisce su X in modo libero e propriamente discontinuo.*

DIMOSTRAZIONE. Tutto lo schema di dimostrazione per il Teorema 1.18 si adatta anche in questo contesto. Se Y è una superficie di Riemann, la sua struttura complessa si solleva a quella del suo rivestimento universale \tilde{Y} , che deve essere uno dei tre modelli X per il Teorema di uniformizzazione di Riemann. Poiché Y è semplicemente connesso, il rivestimento è regolare e quindi $Y = X/G$ dove G è il gruppo degli automorfismi del rivestimento, che deve agire in modo libero e propriamente discontinuo. Inoltre gli automorfismi sono necessariamente biolomorfismi. \square

Notiamo che, a differenza del caso iperbolico, non è necessario supporre che la superficie di Riemann sia completa: effettivamente, questo tipo di ipotesi non ha alcun senso in questo contesto, perché una superficie di Riemann non ha una naturale struttura di spazio metrico. A questo punto è naturale chiedersi quali siano i biolomorfismi dei tre modelli, ed il risultato è sorprendentemente simile a quanto abbiamo già visto per le superfici iperboliche. Indichiamo con $\text{Biol}(X)$ il gruppo dei biolomorfismi di X . Ricordiamo che il disco aperto D è anche un modello per il piano iperbolico \mathbb{H}^2 e indichiamo come sempre con $\text{Isom}^+(D)$ le isometrie che preservano l'orientazione di D .

PROPOSIZIONE 2.25. *Valgono le identità seguenti:*

$$\begin{aligned}\text{Biol}(\mathbb{CP}^1) &= \mathbb{PSL}_2(\mathbb{C}), \\ \text{Biol}(\mathbb{C}) &= \{z \mapsto az + b \mid a \neq 0\}, \\ \text{Biol}(D) &= \text{Isom}^+(D).\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Una funzione olomorfa $f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ è necessariamente una funzione razionale, ovvero un rapporto $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ fra polinomi. Infatti f è una funzione meromorfa su \mathbb{C} che può avere all'infinito solo una singolarità di tipo polo. Il numero di poli è quindi finito: moltiplicando per un polinomio aventi zeri in questi poli possiamo eliminare i poli in \mathbb{C} e ottenere una funzione olomorfa su \mathbb{C} con un polo all'infinito: una versione del teorema di Liouville mostra che questa funzione è un polinomio.

È facile vedere che se $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ è biunivoca allora (dopo aver ridotto ai minimi termini) entrambi i polinomi p e q hanno grado uno e quindi $f \in \mathbb{PSL}_2(\mathbb{C})$. L'uguaglianza $\text{Biol}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a \neq 0\}$ è una facile conseguenza.

L'enunciato per D è invece una conseguenza (o variante) del *lemma di Schwarz*. Sia $f \in \text{Biol}(D)$. A meno di comporre f con una isometria di D possiamo supporre che $f(0) = 0$. La funzione $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ è quindi una funzione olomorfa $g: D \rightarrow \mathbb{C}$. Sia D_r il disco chiuso di raggio $r < 1$ centrato nell'origine. Per il principio del massimo la funzione $|g(z)|$ sul disco D_r ha massimo in un punto $z_0 \in \partial D_r$. Quindi

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} = \frac{|f(z_0)|}{r} \leq \frac{1}{r}$$

per ogni $z \in D_r$. Fissando z e facendo tendere r a 1 si ottiene $|g(z)| \leq 1$ per ogni $z \in D$, ovvero $|f(z)| \leq |z|$. Usando f^{-1} al posto di f si ottiene la disuguaglianza opposta, e quindi $|f(z)| = |z|$ per ogni $z \in D$. Quindi g è una funzione olomorfa a valori nella circonferenza unitaria S^1 . Una funzione olomorfa è costante oppure aperta: poiché S^1 non ha parte interna g deve essere costante. Quindi $f(z) = e^{i\theta}z$ per qualche θ fissato. Quindi f è una rotazione del disco, un elemento di $\text{Isom}^+(D)$. \square

COROLLARIO 2.26. *Sia S una superficie orientabile non omeomorfa alla sfera, al toro, al piano o all'anello aperto $S^1 \times (0, 1)$. C'è una naturale corrispondenza biunivoca fra gli insiemi*

$$\{ \text{strutture iperboliche complete su } S \} \longleftrightarrow \{ \text{strutture complesse su } S \}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se S ha una struttura complessa allora è del tipo $S = X/G$ dove $X \in \{\mathbb{CP}^1, \mathbb{C}, D\}$ e G è un gruppo di biolomorfismi che agisce in modo libero e propriamente discontinuo su X . Tali gruppi per \mathbb{CP}^1 e \mathbb{C} sono classificati facilmente: per \mathbb{CP}^1 c'è solo il gruppo banale e come \mathbb{C}/G si possono ottenere solo tori o anelli. Quindi per ipotesi $X = D$, e la corrispondenza biunivoca naturale discende dal fatto che $\text{Biol}(D) = \text{Isom}^+(D)$. \square

Questa corrispondenza può essere utilizzata per dimostrare fatti non banali in geometria iperbolica, ad esempio il risultato seguente.

PROPOSIZIONE 2.27. *Qualsiasi aperto del piano ammette una struttura iperbolica completa.*

DIMOSTRAZIONE. Un aperto di \mathbb{C} ha una naturale struttura complessa, e quindi una corrispondente struttura iperbolica a meno che non sia omeomorfo ad una sfera, al toro, al piano o all'anello aperto. Non ci sono aperti del piano omeomorfi a sfere e tori. D'altra parte, il piano e l'anello aperto ammettono una metrica iperbolica completa, data rispettivamente da \mathbb{H}^2 e da $\mathbb{H}^2/\langle f \rangle$ per una qualsiasi trasformazione iperbolica f . \square

Ad esempio, il complementare $\mathbb{C} \setminus K$ dell'insieme di Cantor K ammette una metrica iperbolica completa.

La corrispondenza fra strutture complesse e iperboliche complete passa attraverso il rivestimento universale e la scoperta che i gruppi di biolomorfismi e di isometrie del disco D coincidono. Questa corrispondenza non dice però come poter associare concretamente una struttura complessa ad una metrica iperbolica (e viceversa) senza passare dal rivestimento universale. Esiste un modo alternativo di realizzare questa corrispondenza, che esponiamo brevemente. Sia S una superficie orientata qualsiasi, non omeomorfa alla sfera, al toro, al piano e all'anello aperto. Esistono delle mappe naturali fra gli insiemi seguenti di strutture su S :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{strutture complesse}\} & \longleftrightarrow & \{\text{strutture iperboliche complete}\} \\ \uparrow \downarrow & & \downarrow \\ \{\text{strutture quasi-complesse}\} & \longleftarrow & \{\text{strutture conformi}\} \end{array}$$

La corrispondenza fra strutture complesse e strutture iperboliche complete è quella che abbiamo già dimostrato. Ricordiamo che una *struttura conforme* su una varietà differenziabile è una metrica riemanniana vista a meno di riscaldamento. Più formalmente, due metriche riemanniane g, h sulla stessa varietà differenziabile M definiscono la stessa *classe conforme* se esiste una funzione liscia $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tale che $g = f \cdot h$; una struttura conforme per M è la scelta di una classe conforme. Una struttura conforme non definisce una distanza fra punti di M né la lunghezza di un vettore tangente $v \in T_p$, ma l'angolo fra due vettori tangenti $v, w \in T_p$ risulta comunque ben definito. Nel diagramma commutativo assegniamo ad una struttura iperbolica la classe conforme a cui appartiene.

Una *struttura quasi-complessa* su una varietà differenziabile M di dimensione pari è l'assegnazione di un endomorfismo $J_p: T_p \rightarrow T_p$ in ogni punto $p \in M$ tale che $J_p^2 = -\text{id}_{T_p}$. L'endomorfismo deve ovviamente variare in modo liscio con $p \in M$. Una struttura conforme su S definisce una struttura quasi-complessa nel modo seguente: sia J_p l'endomorfismo che ruota ogni vettore tangente di un angolo retto in senso antiorario. Anche una struttura complessa definisce una struttura quasi-complessa: lo spazio tangente T_p ad un punto $p \in S$ ha infatti in modo naturale una struttura complessa e J_p è definito come la moltiplicazione per i .

Un teorema non banale di analisi complessa asserisce che ogni struttura quasi-complessa su una superficie S è *integrabile*, cioè è effettivamente indotta da una struttura complessa. Questo teorema fornisce l'ultima freccia del diagramma.

2.8. Superfici di tipo finito. Siano $g, b, p \geq 0$ tre numeri naturali. Ricordiamo che $S_{g,b}$ è una superficie compatta con bordo ottenuta rimuovendo b dischi aperti disgiunti dalla superficie S_g compatta di genere g . Indichiamo con $S_{g,b,p}$ la superficie ottenuta rimuovendo p punti distinti da $S_{g,b}$. Una superficie di questo tipo è detta *di tipo finito*. La superficie $S_{g,b,p}$ è determinata a meno di diffeomorfismi

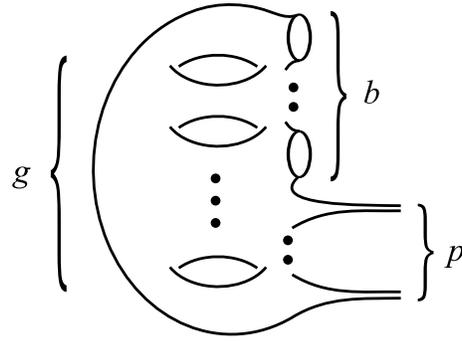
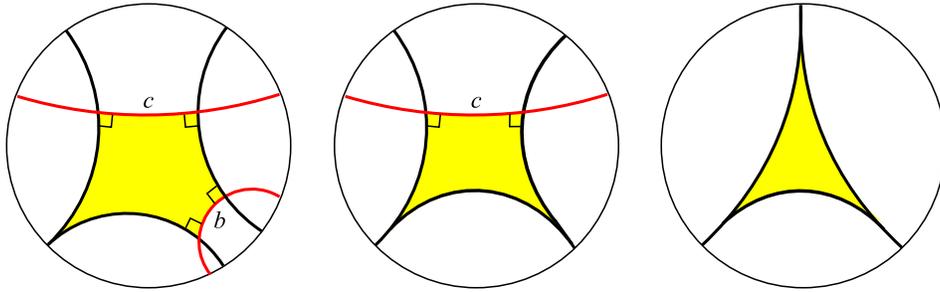
FIGURA 19. Una superficie di tipo finito $S_{g,b,p}$.

FIGURA 20. Un esagono retto con alcuni lati di lunghezza zero, degenerati in vertici ideali.

dalla tripla di numeri g, b, p , e due superfici con triple diverse non sono diffeomorfe. Una superficie di tipo finito è mostrata in Fig. 19. I p punti rimossi sono detti *puncture*. Una superficie di tipo finito ha caratteristica di Eulero

$$\chi(S_{g,b,p}) = 2 - 2g - b - p.$$

Quando $\chi(S_{g,b,p}) < 0$ è possibile costruire sulla superficie una metrica iperbolica completa e di volume finito estendendo le tecniche già usate per $S_{g,b}$. Notiamo che per $p = 0$ la superficie è compatta e quindi una struttura iperbolica è necessariamente completa e di volume finito; entrambi questi fatti però non sono scontati in presenza di *puncture*.

Ricordiamo che in Sezione 2.3 abbiamo costruito per ogni tripla di numeri reali positivi $a, b, c > 0$ un (unico) esagono retto con lati alternati di lunghezza a, b, c . Questa costruzione si estende facilmente al caso $a, b, c \geq 0$ come mostrato in Fig. 20: per ogni tripla $a, b, c \geq 0$ esiste un unico esagono retto a meno di isometrie, dove i lati aventi lunghezza zero degenerano in vertici all'infinito. L'esagono retto con tutti e tre i lati degeneri mostrato in Fig. 20-(destra) è un *triangolo ideale*, avente tutti e tre i vertici all'infinito. I triangoli ideali sono effettivamente tutti isometrici, perché $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ agisce transitivamente sulle triple di punti in $\partial\mathbb{H}^2$.

Prendendo due copie dell'esagono con lati $a, b, c \geq 0$ e incollandole lungo gli altri tre lati come in Sezione 2.3 si ottengono dei pantaloni in cui alcune componenti di bordo sono degenerate a delle cuspidi come mostrato in Fig. 21. Possiamo

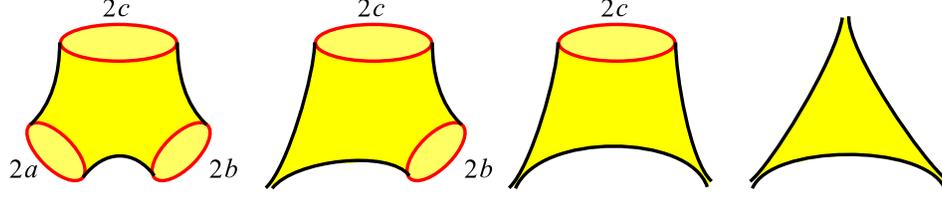


FIGURA 21. Negli esagoni raddoppiati un lato di lunghezza $x > 0$ genera una geodetica di bordo di lunghezza $2x$ mentre un vertice ideale (lato di lunghezza zero) genera una cuspid. Si costruiscono in questo modo delle metriche iperboliche complete e di volume finito sulle superfici di tipo finito $S_{0,3,0}$, $S_{0,2,1}$, $S_{0,1,2}$ e $S_{0,0,3}$. L'ultima a destra è la sfera con tre punture.

quindi usare questi pantaloni degeneri per costruire metriche arbitrarie su qualsiasi superficie di tipo finito $S_{g,b,p}$ con $\chi < 0$: come sopra, è sufficiente suddividere la superficie in pantaloni, ed usare i pantaloni degeneri per creare delle cuspidi ove necessario. Per verificare che otteniamo effettivamente metriche complete e di volume finito è sufficiente verificare che ogni pantalone degeneri sia effettivamente completo e di area finita.

Per calcolare l'area di un pantalone degeneri usiamo il fatto seguente. Ammettiamo d'ora in poi nella nozione di poligono la presenza di alcuni vertici ideali. Ridefiniamo quindi la nozione nel modo seguente: un *poligono* è l'intersezione di un numero finito di semipiani avente parte interna non vuota, la cui chiusura in $\overline{\mathbb{H}^2}$ interseca $\partial\mathbb{H}^2$ in al più un numero finito di punti. I vertici di un poligono possono essere interni (in \mathbb{H}^2) o all'infinito (in $\partial\mathbb{H}^2$). I punti all'infinito hanno per definizione angolo interno nullo. Ad esempio i poligoni mostrati in Fig. 20 hanno vertici interni retti e vertici all'infinito con angolo interno nullo. La somma degli angoli interni di un poligono è sempre strettamente minore di quella che troveremmo in un poligono euclideo, e questa differenza è precisamente l'area del poligono iperbolico:

PROPOSIZIONE 2.28. *Un poligono P con angoli interni $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ha area*

$$\text{Area}(P) = (n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

DIMOSTRAZIONE. Ogni poligono si decompone in triangoli, ed è facile vedere che basta dimostrare la formula per questi. Consideriamo innanzitutto un triangolo avente almeno un vertice all'infinito. Usiamo il modello del semipiano e mettiamo questo vertice all'infinito come in Fig. 22. Gli altri due vertici hanno angoli interni α e β e possono essere sia interni che all'infinito. Possiamo supporre che il vertice del cerchio di raggio r in figura sia l'origine di \mathbb{R}^2 . Nel calcolare l'area della regione rossa scriviamo la variabile x come $x = r \cos \theta$. Il triangolo T è il dominio

$$T = \{(r \cos \theta, y) \mid \beta \leq \theta \leq \pi - \alpha, y \geq r \sin \theta\}.$$

L'area del triangolo è quindi

$$\begin{aligned} \text{Area}(T) &= \int_T \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \int_{r \sin \theta}^{\infty} \frac{-r \sin \theta}{y^2} dy d\theta \\ &= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} -r \sin \theta \left[-\frac{1}{y} \right]_{r \sin \theta}^{\infty} d\theta = \int_{\beta}^{\pi-\alpha} \frac{r \sin \theta}{r \sin \theta} d\theta = \int_{\beta}^{\pi-\alpha} 1 = \pi - \alpha - \beta. \end{aligned}$$

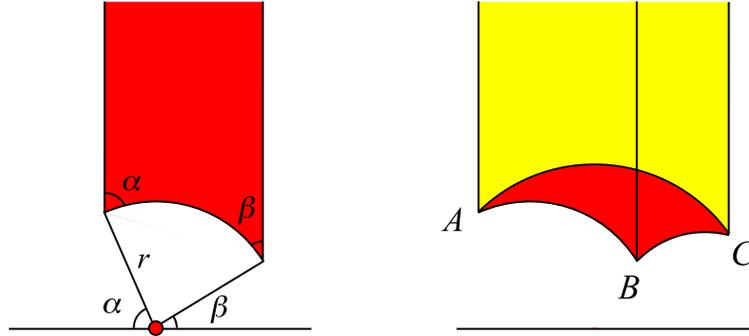


FIGURA 22. Un triangolo con almeno un vertice ideale (sinistra). L'area di un triangolo con vertici interni può essere calcolata come differenza di aree di triangoli con vertici ideali (destra).

L'area di un triangolo con vertici interni ABC può essere calcolata come in Fig. 22- (destra), scegliendo un punto all'infinito ∞ e usando la formula

$$\text{Area}(ABC) = \text{Area}(AB\infty) + \text{Area}(BC\infty) - \text{Area}(AC\infty).$$

□

COROLLARIO 2.29. *Un pantalone iperbolico con parametri $a, b, c \geq 0$ ha area 2π .*

DIMOSTRAZIONE. Il pantalone è unione di due esagoni retti. Un esagono retto ha area $4\pi - 3\pi = \pi$. Se alcuni dei parametri a, b, c sono nulli, l'esagono è degenere ed è uno dei poligoni mostrati in Fig. 20. Per ciascuno di questi poligoni l'area resta π . □

Una struttura iperbolica per $S_{g,b,p}$ ottenuta incollando pantaloni geodetici ha quindi sempre area finita, pari a $-2\pi\chi(S_{g,b,p})$. Abbiamo quindi ottenuto un'ennesima versione del Teorema di Gauss-Bonnet. È facile mostrare che una tale struttura iperbolica è completa. Infine, si può definire lo spazio di Teichmüller di $S_{g,b,p}$ analogamente a quanto fatto per $S_{g,b}$ e si ottiene il risultato seguente.

TEOREMA 2.30. *Dopo aver fissato un opportuno sistema di riferimento esiste una corrispondenza biunivoca fra $\text{Teich}(S_{g,b,p})$ e $\mathbb{R}^{-3\chi(S_{g,b,p})-p} = \mathbb{R}^{6g+3b+2p-6}$.*

In particolare, esiste una sola struttura iperbolica per la sfera con 3 punture $S_{0,0,1}$, ed è quella ottenuta in Fig. 21 incollando due triangoli ideali.

Varietà con singolarità

Introduciamo in questo capitolo due nozioni importanti che generalizzano le varietà iperboliche (piatte, ellittiche):

- un *orbifold* è un oggetto ottenuto quotizzando una varietà iperbolica (piatta, ellittica) per un gruppo discreto di isometrie, eventualmente con punti fissi,
- una *varietà con singolarità coniche* è una varietà iperbolica (piatta, ellittica) con un luogo singolare (una varietà di codimensione due) su cui il tensore metrico non è definito e la metrica forma un cono di angolo diverso da 2π .

Le due nozioni coincidono per una varietà con singolarità coniche con angoli che dividono 2π .

1. Orbifold

1.1. Politopi. Introduciamo gli oggetti seguenti.

DEFINIZIONE 1.1. Una *tassellazione* di una varietà M è una collezione di sottoinsiemi $\{D_i\}_{i \in I}$ di M , detti *tasselli*, tale che $M = \cup_{i \in I} D_i$ e $\text{int}(D_i) \cap \text{int}(D_j) = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.

La definizione proposta è molto generica: negli esempi che considereremo M sarà sempre una varietà ellittica, piatta o iperbolica ed i tasselli saranno sempre *politopi*.

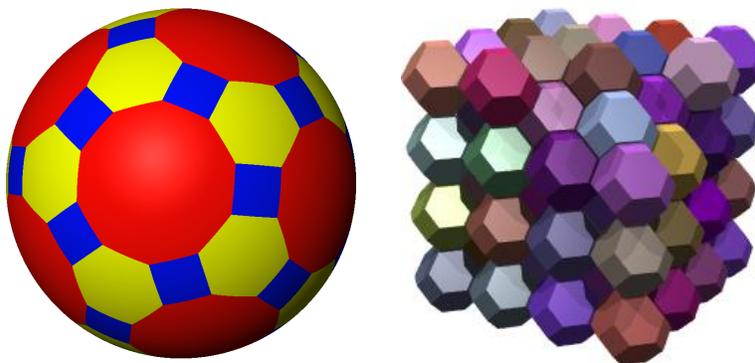


FIGURA 1. Una tassellazione di S^2 in quadrati, esagoni e decagoni, e una tassellazione di \mathbb{R}^3 in ottaedri troncati.

DEFINIZIONE 1.2. Un *politopo* in \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n oppure S^n è l'intersezione di un numero finito di semispazi che sia compatta e con parte interna non vuota.

La definizione di politopo che abbiamo scelto è quella più restrittiva; molti autori, a seconda del contesto, rilassano alcune delle richieste, ammettendo ad esempio in \mathbb{H}^n intersezioni non compatte (ma eventualmente di volume finito) e/o un numero infinito di semispazi (in quest'ultimo caso si richiede per lo meno la *locale finitezza*, cioè che ogni compatto di \mathbb{H}^n intersechi al più un numero finito di iperpiani bordi di questi semispazi).

PROPOSIZIONE 1.3. *Sia P un politopo. Esiste un unico insieme minimale di semispazi S_1, \dots, S_k tale che $P = S_1 \cap \dots \cap S_k$.*

Sia $\{S_1, \dots, S_k\}$ un insieme minimale di semispazi per P . L'intersezione fra P e l'iperpiano ∂S_i è una *faccia* $(n-1)$ -dimensionale di P ; tale faccia è a sua volta un poliedro $(n-1)$ -dimensionale dentro l'iperpiano ∂S_i , che può essere identificato con \mathbb{H}^{n-1} (o \mathbb{R}^{n-1} , S^{n-1}). Il poliedro P ha quindi k facce $(n-1)$ -dimensionali. Più in generale, una faccia h -dimensionale di P è l'intersezione di $h-1$ facce $(n-1)$ -dimensionali, quando è non vuota. Le facce di dimensione 0 e 1 si chiamano *vertici* e *spigoli*. Una faccia h -dimensionale è in modo naturale un poliedro h -dimensionale nell'unico spazio h -dimensionale che lo contiene.

PROPOSIZIONE 1.4. *Un politopo è l'involuppo convesso dei suoi vertici.*

Il *baricentro* di un politopo è definito in ogni geometria. Siano p_1, \dots, p_k punti in \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n o S^n e $t_1, \dots, t_k \geq 0$ numeri reali con $t_1 + \dots + t_k = 1$. La *combinazione convessa*

$$p = t_1 p_1 + \dots + t_k p_k$$

è il punto p in \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n o S^n definito nel modo seguente. Per \mathbb{H}^n usiamo il modello dell'iperboloide $I^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e rappresentiamo S^n come sempre dentro \mathbb{R}^{n+1} . In tutti e tre i modelli i punti p_i sono vettori di \mathbb{R}^{n+1} o \mathbb{R}^n . La loro combinazione $v = t_1 p_1 + \dots + t_k p_k$ è quindi un altro vettore di \mathbb{R}^{n+1} o \mathbb{R}^n . Nel caso piatto si pone $p = v$. Nei casi iperbolico e ellittico si pone $p = \lambda v$, dove $\lambda > 0$ è l'unico scalare per cui λv appartiene all'iperboloide I^n o alla sfera S^n .

DEFINIZIONE 1.5. Il *baricentro* del politopo di vertici v_1, \dots, v_k è il punto

$$\frac{1}{k} v_1 + \dots + \frac{1}{k} v_k.$$

La definizione di politopo si estende ad ogni varietà iperbolica (piatta, ellittica) per passaggio a rivestimento universale

DEFINIZIONE 1.6. Un *politopo* in una varietà iperbolica (piatta, ellittica) completa è un sottoinsieme connesso e semplicemente connesso la cui controimmagine nel rivestimento universale \mathbb{H}^n (\mathbb{R}^n , S^n) è unione disgiunta di politopi.

1.2. Tassellazioni. Considereremo adesso le tassellazioni di varietà iperboliche (piatte, ellittiche) in cui tutti i tasselli siano politopi. Abbiamo già incontrato un esempio importante.

PROPOSIZIONE 1.7. *Una superficie chiusa iperbolica Σ_g di genere $g \geq 2$ ha una tassellazione in esagoni retti.*

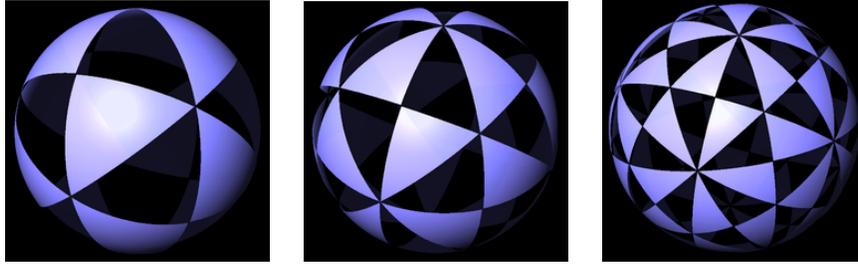


FIGURA 2. Le tassellazioni $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ e $(2, 3, 5)$ nella sfera.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo visto nella dimostrazione del Teorema 2.20 del capitolo precedente che Σ_g si decompone in pantaloni, e che ciascun pantalone si decompone in due esagoni retti. \square

Si noti che nella definizione di tassellazione non è richiesto che l'intersezione di due politopi adiacenti sia una faccia per entrambi. Ad esempio, nella proposizione appena enunciata due esagoni adiacenti non si intersecano necessariamente in un lato o un vertice: possono intersecarsi anche in un segmento contenuto in un lato. Nelle due tassellazioni mostrate in Fig. 1 invece l'intersezione di due politopi adiacenti è sempre una faccia di entrambi.

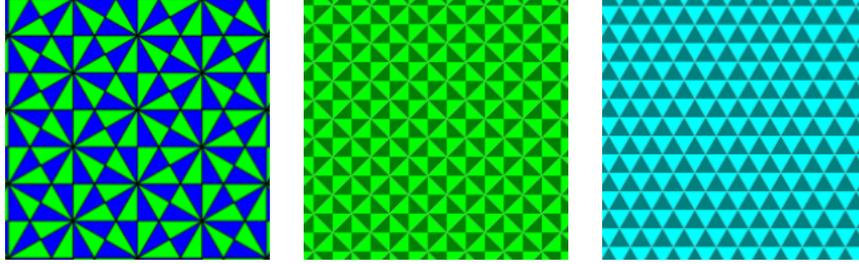
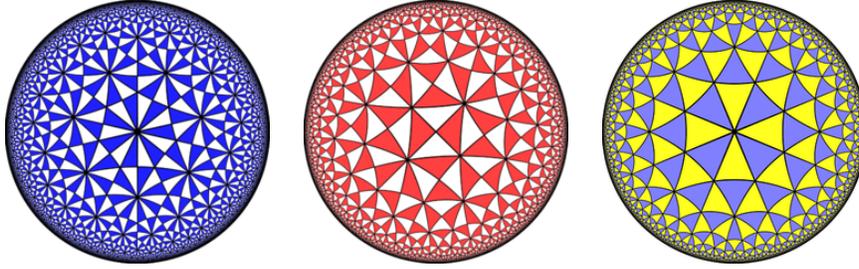
Un altro esempio di tassellazione è fornito dai *gruppi triangolari*. Iniziamo con il seguente:

ESERCIZIO 1.8. Dati tre numeri reali $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ esiste un triangolo Δ con angoli interni α, β, γ dentro $\mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2$ o S^2 a seconda che la somma $\alpha + \beta + \gamma$ sia minore, uguale o maggiore di π . Tale triangolo è unico a meno di isometrie in \mathbb{H}^2 e S^2 , e unico a meno di similitudine in \mathbb{R}^2 .

Siano $a, b, c \geq 2$ tre numeri naturali, e sia Δ il triangolo (nella geometria opportuna) avente angoli interni $\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{c}$. Il triangolo Δ è contenuto in $\mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2, S^2$ a seconda che la somma $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ sia minore, uguale o maggiore di uno. Specchiando iterativamente il triangolo Δ lungo i suoi lati si costruisce una tassellazione di $\mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2$ o S^2 .

Le terne realizzabili in S^2 sono $(2, 2, c)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ e $(2, 3, 5)$. Le tassellazioni prodotte dalle ultime tre sono mostrate in Fig. 2 e sono strettamente collegate ai solidi platonici. Ricordiamo che il gruppo delle isometrie di un solido platonico è un sottogruppo finito e quindi discreto di $\text{Isom}(S^2)$, e che due solidi duali identificano lo stesso gruppo. Otteniamo quindi tre gruppi discreti di isometrie: del tetraedro, del cubo (o ottaedro) e dell'icosaedro (o dodecaedro). Un dominio fondamentale per l'azione di questi gruppi è proprio uno qualsiasi dei triangoli delle tassellazioni (rispettivamente) di tipo $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ e $(2, 3, 5)$. Ciascuno dei tre gruppi agisce in modo transitivo e libero sui triangoli della tassellazione: in particolare i tre gruppi hanno ordine 24, 48 e 120, pari al numero di triangoli in ciascuna tassellazione. I gruppi sono isomorfi rispettivamente a S_4 , $S_4 \times \mathbb{Z}_2$ e $A_5 \times \mathbb{Z}_2$.

Le terne realizzabili nel piano euclideo \mathbb{R}^2 sono $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ e $(3, 3, 3)$ e producono le tassellazioni mostrate in Fig. 3. Tutte le altre sono realizzabili nel piano iperbolico \mathbb{H}^2 : alcune sono mostrate in Fig. 4. Vediamo ora che anche i triangoli di queste tassellazioni sono domini di gruppi discreti di isometrie.

FIGURA 3. Le tassellazioni $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ e $(3, 3, 3)$ nel piano.FIGURA 4. Le tassellazioni $(2, 3, 7)$, $(2, 4, 5)$ e $(3, 3, 4)$ nel piano iperbolico.

DEFINIZIONE 1.9. Il gruppo triangolare $T(a, b, c)$ è il gruppo di isometrie di \mathbb{H}^2 , \mathbb{R}^2 o S^2 generato dalle riflessioni lungo i tre lati di Δ .

PROPOSIZIONE 1.10. Il gruppo $T(a, b, c)$ è un gruppo discreto di isometrie di \mathbb{H}^2 , \mathbb{R}^2 o S^2 , ed il triangolo Δ è un dominio fondamentale per $T(a, b, c)$. Il gruppo ha la presentazione seguente:

$$\langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^2, (xy)^c, (yz)^a, (zx)^b \rangle.$$

La proposizione enunciata è un caso particolare di un fatto più generale. Ricordiamo che una faccia F di codimensione 2 in un politopo P in \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n o S^n è intersezione di esattamente due facce F_1, F_2 di codimensione 1. L'angolo diedrale in F è definito intersecando P con un 2-piano π ortogonale a F e misurando l'angolo che formano i due segmenti $F_1 \cap \pi$ e $F_2 \cap \pi$.

TEOREMA 1.11. Sia P un politopo in \mathbb{H}^2 , \mathbb{R}^2 o S^2 . Siano F_1, \dots, F_k le facce di codimensione 1 in P . Supponiamo che ogni faccia di codimensione due $F_i \cap F_j$ abbia un angolo diedrale $\alpha_{ij} = \frac{\pi}{a_{ij}}$ che divide π . Allora il gruppo di isometrie generato dalle riflessioni lungo le facce F_i è discreto ed ha P come dominio fondamentale. Inoltre una sua presentazione è la seguente:

$$\langle F_1, \dots, F_k \mid F_1^2, \dots, F_k^2, (F_i F_j)^{a_{ij}} \rangle$$

con una relazione del tipo $(F_i F_j)^{a_{ij}}$ per ogni faccia $F_i \cap F_j$ di codimensione 2.

1.3. Lemma di Selberg. Come abbiamo visto, costruire gruppi discreti di $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ è relativamente facile; d'altra parte, costruire esplicitamente gruppi discreti senza punti fissi è più difficile: in tutti gli esempi mostrati i gruppi contenevano molte riflessioni, rotazioni e altre mappe con punti fissi. Si possono però

sempre eliminare tutti questi elementi scegliendo un opportuno sottogruppo, grazie al seguente risultato algebrico.

LEMMA 1.12 (Lemma di Selberg). *Sia G un sottogruppo finitamente generato di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Esiste un sottogruppo normale $H \triangleleft G$ di indice finito che non contiene elementi di ordine finito.*

COROLLARIO 1.13. *Sia G un sottogruppo discreto finitamente generato di isometrie di \mathbb{H}^n . Esiste un sottogruppo normale $H \triangleleft G$ di indice finito che contiene solo trasformazioni paraboliche e iperboliche.*

DIMOSTRAZIONE. Il gruppo $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ è isomorfo a $O(n, 1)_*$ ed è quindi un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$, per cui possiamo applicare il lemma di Selberg a G . Otteniamo un sottogruppo $H \triangleleft G$ di indice finito che non contiene elementi di ordine finito. Gli elementi ellittici f in un gruppo discreto G hanno tutti ordine finito: se così non fosse, il gruppo G conterrebbe una successione infinita di elementi f, f^2, f^3, \dots che fissano tutti lo stesso punto p , contraddicendo il fatto che G è discreto (e quindi agisce in modo propriamente discontinuo). Quindi H non contiene elementi ellittici. \square

1.4. Orbifold. È comunque utile dare un nome ai quozienti di \mathbb{H}^n per un qualsiasi gruppo discreto, anche nel caso in cui questo contenga degli elementi ellittici. Questi quozienti non sono varietà: sono oggetti più generali, detti *orbifold*, che hanno un comportamento simile alle varietà da molti punti di vista. Se una varietà è definita con un atlante di aperti in \mathbb{R}^n , un orbifold è definito con un atlante di aperti in \mathbb{R}^n quozientati per gruppi finiti. Più precisamente, la definizione è la seguente.

DEFINIZIONE 1.14. Un *orbifold* n -dimensionale è uno spazio topologico di Hausdorff ricoperto da una collezione di aperti $\{U_i\}_{i \in I}$ chiusa per intersezione finita, dotata della struttura seguente. Per ogni $i \in I$ è definito:

- (1) un sottogruppo finito $\Gamma_i < O(n)$ e un aperto $V_i \subset \mathbb{R}^n$ che sia Γ_i -invariante,
- (2) una mappa continua $\varphi_i: V_i \rightarrow U_i$ detta *carta*, invariante per Γ_i e che induca un omeomorfismo fra V_i/Γ_i e U_i .

Le carte devono soddisfare la condizione seguente di compatibilità:

- per ogni inclusione $U_i \subset U_j$ c'è un omomorfismo iniettivo $f_{ij}: \Gamma_i \hookrightarrow \Gamma_j$ ed un diffeomorfismo ψ_{ij} fra V_i e un aperto contenuto in V_j che sia equivariante per Γ_i e compatibile con le carte, cioè $\varphi_j \circ \psi_{ij} = \varphi_i$.

Le mappe ψ_{ij} e f_{ij} vanno pensate come definite solo a meno dell'azione di Γ_j .¹ In particolare, se $U_i \subset U_j \subset U_k$ allora si verifica che le uguaglianze $\psi_{ik} = \psi_{ij} \circ \psi_{jk}$ e $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ sono vere solo a meno di queste azioni. Come per le varietà differenziabili, due strutture di questo tipo definiscono lo stesso oggetto se la loro unione è compatibile.²

Fare figura per ψ_{ij} definita solo a meno di composizione: usare punto conico fra due specchi.

¹L'azione è per composizione su ψ_{ij} e come coniugio su f_{ij} .

²Si chiede cioè che l'unione dei due ricoprimenti aperti sia contenuta in un ricoprimento più grande chiuso rispetto all'intersezione, e che ci sia una struttura su questo ricoprimento grande che si restringa a quelle date sui due sotto-ricoprimenti. La chiusura rispetto all'intersezione, che normalmente non è richiesta nella definizione di varietà, rende più semplice la definizione di orbifold ma lievemente più complessa la definizione di strutture compatibili.

In ogni punto x di un orbifold è definito il *gruppo di isotropia* Γ_x come lo stabilizzatore di x rispetto all'azione di Γ_i in una qualsiasi carta U_i contenente x . Per definizione Γ_x è un sottogruppo finito di $O(n)$.³

ESEMPIO 1.15. Una varietà differenziabile è un orbifold in cui i gruppi di isotropia sono tutti banali. Una varietà differenziabile con bordo può essere interpretata come un orbifold i cui punti al bordo hanno una struttura locale del tipo \mathbb{R}^n/Γ dove $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$ è un gruppo generato da una riflessione. Il bordo va interpretato qui come uno “specchio”.

I punti con gruppo di isotropia banale sono detti *regolari*, mentre gli altri sono *singolari*.

PROPOSIZIONE 1.16. *I punti regolari in un orbifold formano un aperto denso.*

DIMOSTRAZIONE. Un punto singolare è localmente un luogo di punti fissi per un gruppo di isometrie vettoriali di \mathbb{R}^n , ed è quindi un chiuso contenuto in un iperpiano, con parte interna vuota. \square

Molte nozioni definite per le varietà si estendono naturalmente agli orbifold.

DEFINIZIONE 1.17. Una *mappa continua* da uno spazio topologico X in un orbifold M è definita come una mappa continua $\alpha: X \rightarrow M$ assieme ad un esplicito sollevamento continuo su V_i per tutte le carte $V_i \rightarrow V_i/\Gamma_i$, in modo che questi sollevamenti siano compatibili.⁴ Due mappe i cui sollevamenti su V_i cambiano solo per una azione dei gruppi Γ_i sono considerate equivalenti.

DEFINIZIONE 1.18. Se $x_0 \in M$ è un punto base qualsiasi, è possibile definire il *gruppo fondamentale* $\pi_1(M, x_0)$ nel modo usuale, usando le nozioni di laccio e omotopia in M , che sono ben definite in quando mappe da $[0, 1]$ o $[0, 1]^2$ in M .

DEFINIZIONE 1.19. Un *rivestimento* $p: M \rightarrow N$ fra orbifold è una mappa continua tale che ogni punto $x \in N$ abbia un intorno U del tipo V/Γ per qualche $V \subset \mathbb{R}^n$, la cui controimmagine $p^{-1}(U)$ sia un unione disgiunta di pezzi del tipo V/Γ_i per dei sottogruppi $\Gamma_i \subset \Gamma$.⁵

Un orbifold è *buono* se ha un rivestimento finito che è una varietà. Un rivestimento $p: M \rightarrow N$ è *universale* se gode della seguente proprietà universale: per ogni altro rivestimento $p': M' \rightarrow N$ esiste un rivestimento $q: M \rightarrow M'$ tale che $p = q \circ p'$

TEOREMA 1.20. *Un orbifold ha un rivestimento universale, unico a meno di isomorfismi. Il rivestimento universale è una varietà se e solo se l'orbifold è buono.*

Come per gli usuali spazi topologici, il gruppo degli automorfismi del rivestimento universale è isomorfo al gruppo fondamentale dell'orbifold.

³Nella definizione di orbifold, la scelta di $O(n)$ al posto del più generale $GL(n, \mathbb{R}^n)$ in realtà non è restrittiva, perché ogni sottogruppo finito di $GL(n, \mathbb{R}^n)$ è coniugato ad un sottogruppo di $O(n)$.

⁴Se $U_i \subset U_j$, i due sollevamenti α_i e α_j in V_i e V_j devono essere tali che $\alpha_i = \alpha_j \circ \psi_{ij}$ tramite una mappa di transizione ψ_{ij} : scriviamo “una” perché ricordiamo che ψ_{ij} è definita solo a meno di post-composizione con Γ_j .

⁵Si intende che U è isomorfa a V/Γ , che $p^{-1}(U) = \cup_i U_i$ con U_i isomorfa a V/Γ_i , e che tutti gli isomorfismi commutino con la proiezione p .

DEFINIZIONE 1.21. La definizione di spazio tangente ad una varietà come classe di curve differenziabili passanti per un punto si estende facilmente agli orbifold.⁶ Ricordiamo dalla Definizione 1.17 che una curva differenziabile passante per x è una curva differenziabile in V_x , vista a meno dell'azione di Γ_x . Quindi lo spazio tangente T_x non è altro che \mathbb{R}^n/Γ_x . Lo spazio tangente è quindi anch'esso un orbifold.

Un orbifold è *orientato* se $\Gamma_i < SO(n)$ per ogni i e i diffeomorfismi ψ_{ij} preservano tutti l'orientazione di \mathbb{R}^n . In un orbifold orientabile le riflessioni non sono ammesse in Γ_i e quindi l'insieme singolare ha codimensione almeno 2.

1.5. Orbifold riemanniano. Un *orbifold riemanniano* è un orbifold in cui è definito un prodotto scalare definito positivo in ogni spazio tangente. Quando lo spazio tangente è un quoziente \mathbb{R}^n/Γ , si intende che il prodotto scalare è definito su \mathbb{R}^n ed è invariante per l'azione di Γ . Il prodotto scalare deve ovviamente variare in modo liscio su tutte le carte V_i . In un orbifold riemanniano sono definiti molti dei concetti presenti in una varietà riemanniana: è definita una lunghezza per le curve e quindi una distanza fra punti, una nozione di geodetica (una curva i cui sollevamenti nei V_i sono geodetiche) e di forma volume (l'aperto denso dei punti regolari è una usuale varietà riemanniana).

PROPOSIZIONE 1.22. *Se M è una varietà riemanniana e $\Gamma < \text{Isom}(M)$ un sottogruppo discreto, il quoziente M/Γ ha una naturale struttura di orbifold. La proiezione $p: M \rightarrow M/\Gamma$ è un rivestimento di orbifold.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in M/\Gamma$ un punto e $\tilde{x} \in M$ una sua controimmagine. Poiché Γ agisce in modo propriamente discontinuo, lo stabilizzatore $\Gamma_{\tilde{x}}$ di \tilde{x} è finito ed esiste un $r > 0$ tale che $\exp_{\tilde{x}}(B_r(0)) = B_r(\tilde{x})$ e $g(B_r(\tilde{x}))$ interseca $B_r(\tilde{x})$ se e solo se $g \in \Gamma_{\tilde{x}}$. La palla $B_r(\tilde{x})$ è inoltre chiaramente Γ_x -invariante.

Definiamo quindi una struttura di orbifold su M/Γ prendendo per ogni x l'aperto $U_x = B_r(\tilde{x})/\Gamma_x$ con carta da $V_x = B_r(\tilde{x})$ e gruppo finito Γ_x per un $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ qualsiasi. Estendiamo il ricoprimento $\{U_x\}$ così ottenuto prendendo tutte le intersezioni non vuote. La proiezione è un rivestimento per costruzione. \square

Più in generale, se $\Gamma < \Gamma'$ sono gruppi discreti di isometrie per una varietà riemanniana M allora $M/\Gamma \rightarrow M/\Gamma'$ è un rivestimento. In particolare, il reticolo dei sottogruppi discreti di $\text{Isom}(M)$ definisce un reticolo di rivestimenti fra orbifold. Un *orbifold iperbolico* (*piatto*, *ellittico*) è il quoziente di \mathbb{H}^n (\mathbb{R}^n , S^n) per un gruppo discreto Γ di isometrie.

Il gruppo triangolare $T(a, b, c)$ definisce un orbifold (iperbolico, piatto o ellittico a seconda della terna a, b, c) che è topologicamente un triangolo Δ : i punti interni hanno isotropia banale, quelli sui lati hanno una isotropia \mathbb{Z}_2 generata da una riflessione, quelli sui 3 vertici hanno isotropia $\mathbb{Z}_{2a}, \mathbb{Z}_{2b}, \mathbb{Z}_{2c}$ generata da rotazioni. Per il Lemma di Selberg, tutti questi orbifold sono buoni, sono cioè rivestiti da una opportuna superficie (iperbolica, piatta o ellittica), che eredita una tassellazione in triangoli isometrici a Δ .

Il sottogruppo $T(a, b, c)^+$ delle trasformazioni che preservano l'orientazione in $T(a, b, c)$ è un gruppo di indice due. Questo sottogruppo genera un orbifold Δ^+ ed un rivestimento $\Delta^+ \rightarrow \Delta$ di grado due. La tassellazione di Δ^+ in un triangolo si solleva ad una tassellazione con due triangoli per Δ^+ . Il sottogruppo $T(a, b, c)^+$ non contiene riflessioni (perché invertono l'orientazione). Quindi l'orbifold Δ^+ non ha

⁶La definizione tramite derivazione però si estende meno facilmente.

FIGURA 5. La tassellazione di Farey di \mathbb{H}^2 in triangoli ideali.

punti a specchio, e i gruppi di isotropia sono tutti gruppi finiti di rotazioni. Essendo di indice due, l'orbifold Δ^+ ha una tassellazione con due triangoli Δ : l'orbifold è topologicamente una sfera, in cui tutti i punti hanno isotropia banale tranne tre punti, che hanno isotropia $\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z}_c$ generata da rotazioni di angolo $\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{b}, \frac{2\pi}{c}$. I tre punti hanno localmente una metrica singolare con angolo conico $\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{b}, \frac{2\pi}{c}$ più piccolo di 2π .

Fare figura con sfera e tre angoli conici.

1.6. Politopi ideali. La nozione di insieme convesso è definita su tutto il disco chiuso $\overline{\mathbb{H}^n}$. Infatti per ogni coppia di punti $x, y \in \overline{\mathbb{H}^n}$ è ben definito il “segmento” con estremi x e y in $\overline{\mathbb{H}^n}$: il segmento è l'usuale segmento finito se x e y sono interni, una semiretta uscente da x con direzione y se x è interno e y sul bordo, e la retta con estremi x e y se i punti sono entrambi sul bordo. Avendo definito un segmento per ogni coppia di punti, un *insieme convesso* in $\overline{\mathbb{H}^n}$ è un insieme S in cui se $x, y \in S$ allora l'intero segmento definito da x, y è contenuto in S . L'*inviluppo convesso* di un insieme è quindi come sempre il più piccolo convesso che contiene l'insieme, ottenuto intersecando tutti i convessi che lo contengono.

DEFINIZIONE 1.23. Un *politopo ideale* è l'inviluppo convesso di un numero finito di punti nel bordo $\partial\mathbb{H}^n$.

Abbiamo già visto in particolare un triangolo ideale nel capitolo precedente. Come vedremo, in molti contesti i politopi ideali sono più trattabili di quelli usuali. Ad esempio, è facile definire una particolare tassellazione in triangoli ideali, detta *tassellazione di Farey*. La tassellazione è costruita nel modo seguente. Si considera \mathbb{H}^2 con il modello del semipiano. Per ogni coppia di numeri razionali $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ (con frazioni ridotte ai minimi termini) tali che $ps - qr = \pm 1$ si disegna la geodetica con punti all'infinito $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$. Si ottiene una tassellazione in triangoli ideali, che nel modello del disco è mostrata in Fig. 5.

Ricordiamo che $\text{Isom}(\mathbb{H}^2) = \mathbb{PGL}_2(\mathbb{R})$ dove le matrici con determinante negativo rappresentano antitrasformazioni di Möbius.

PROPOSIZIONE 1.24. *Il sottogruppo di $\text{Isom}(\mathbb{H}^2) = \mathbb{PGL}_2(\mathbb{R})$ che preserva la tassellazione di Farey è $\mathbb{PGL}_2(\mathbb{Z})$ ed il sottogruppo di indice due formato dalle isometrie che preservano l'orientazione è $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Gli orbifold $\mathbb{H}^2/\mathbb{PGL}_2(\mathbb{Z})$ e $\mathbb{H}^2/\mathbb{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hanno area $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$ e sono mostrati in Fig. 6.*

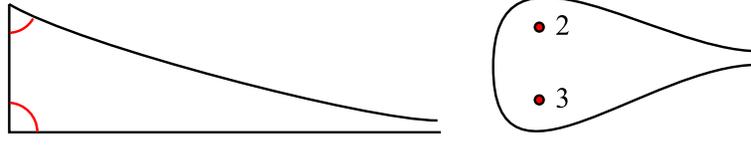


FIGURA 6. L'orbifold $\mathbb{H}^2/\mathbb{PGL}_2(\mathbb{Z})$ mostrato a sinistra ha tre specchi, di cui due infiniti che tendono ad una cuspide. Questi formano con il terzo specchio dei vertici di angolo $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{3}$. L'orbifold ha area $\frac{\pi}{6}$. Il sottogruppo $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{Z}) < \mathbb{PGL}_2(\mathbb{Z})$ di indice due formato soltanto da trasformazioni che preservano l'orientazione produce l'orbifold $\mathbb{H}^2/\mathbb{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mostrato a destra di area $\frac{\pi}{3}$, ottenuto incollando lungo gli specchi due copie di quello a sinistra. Ha una cuspide e due punti con isotropia rotatoria \mathbb{Z}_2 e \mathbb{Z}_3 .

DIMOSTRAZIONE. Una isometria $\varphi \in \mathbb{PGL}_2(\mathbb{Z})$ è una trasformazione o anti-trasformazione del tipo

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{oppure} \quad z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

a seconda del segno del determinante $ad - bc = \pm 1$. Siano $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ due punti all'infinito collegati da una geodetica della tassellazione, cioè tali che $\det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \pm 1$. Le immagini $\frac{p'}{q'} = \varphi(\frac{p}{q})$ e $\frac{r'}{s'} = \varphi(\frac{r}{s})$ sono determinate dal prodotto di matrici $\begin{pmatrix} p' & r' \\ q' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$. Dal Teorema di Binet segue che $\det \begin{pmatrix} p' & r' \\ q' & s' \end{pmatrix} = \pm 1$ e quindi anche le immagini $\frac{p'}{q'}$ e $\frac{r'}{s'}$ sono collegate da uno spigolo della tassellazione. Abbiamo mostrato che $\mathbb{PGL}_2(\mathbb{Z})$ preserva la tassellazione di Farey.

D'altra parte, è facile vedere che con questo tipo di trasformazioni si possono mandare i tre punti $0 = \frac{0}{1}$, $\infty = \frac{1}{0}$ e $1 = \frac{1}{1}$, vertici di un triangolo della tassellazione, in una qualsiasi terna di vertici di un altro triangolo. Quindi ogni isometria che preservi la tassellazione è un elemento di $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Le isometrie della tassellazione agiscono in modo transitivo sui triangoli ideali. Lo stabilizzatore di un triangolo ideale è il gruppo S_3 delle sue isometrie, determinate dalle permutazioni dei suoi tre vertici. Si ottiene quindi un dominio quotizzando un triangolo ideale per le sue 6 isometrie. Il risultato ha quindi area $\frac{\pi}{6}$ ed è l'orbifold mostrato in Fig. 6-(sinistra). L'orbifold di destra è ottenuto specchiando quello di sinistra. \square

1.7. Solidi platonici. Ogni solido platonico S ha una famiglia di rappresentazioni in \mathbb{H}^3 , \mathbb{R}^3 e S^3 con angolo diedrale variabile. Per costruire questa famiglia è sufficiente prendere un punto x qualsiasi di \mathbb{H}^3 , \mathbb{R}^3 o S^3 , rappresentare S dentro lo spazio tangente T_x centrato nell'origine e tale che i suoi vertici $v_1, \dots, v_k \in T_x$ abbiano norma uno, e quindi definire le geodetiche $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ uscenti da x con velocità v_1, \dots, v_k . Fissato un tempo t è quindi possibile prendere l'involuppo convesso dei punti $\gamma_1(t), \dots, \gamma_k(t)$ e ottenere un poliedro regolare in \mathbb{H}^3 , \mathbb{R}^3 o S^3 , con le stesse simmetrie di S e avente baricentro in x . Indichiamo con $S(t)$ il solido così ottenuto, con la convenzione seguente: per $t < 0$ questo è il solido ottenuto a tempo $|t|$ in \mathbb{H}^3 , con $t = 0$ è il solido usuale in \mathbb{R}^3 (che è unico a meno di similitudini), e con $t > 0$ questo è il solido ottenuto in S^3 . Il solido $S(t)$ è definito per ogni $t \in [-\infty, \frac{\pi}{2}]$: per $t = -\infty$ intendiamo il solido iperbolico ideale, involuppo convesso dei vertici

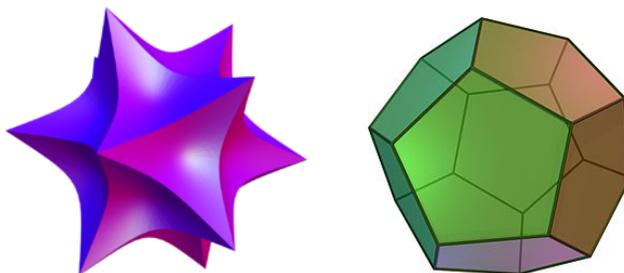


FIGURA 7. Un icosaedro regolare iperbolico e un dodecaedro regolare euclideo.

all'infinito delle semirette γ_i , mentre per $t = \frac{\pi}{2}$ l'involuppo convesso dei punti $S(t)$ coincide con la semisfera in S^n centrata in x .

Ricordiamo che le simmetrie di un solido platonico S agiscono transitivamente su vertici, spigoli e facce. In particolare tutti gli spigoli di $S(t)$ hanno lo stesso angolo diedrale $\theta(t)$. Per costruzione θ è una funzione continua strettamente decrescente.

PROPOSIZIONE 1.25. *Sia $n \in \{3, 4, 5\}$ il numero di spigoli distinti incidenti in un vertice di S . Vale*

$$\theta\left(\left[-\infty, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\frac{n-2}{n}\pi, \pi\right].$$

DIMOSTRAZIONE. Intersecando il poliedro ideale $S(-\infty)$ in \mathbb{H}^3 con una piccola orosfera O centrata in un suo vertice v otteniamo un poligono P dentro il piano euclideo O , univocamente determinato a meno di similitudini (variando O la metrica euclidea cambia per riscaldamento). Poiché esistono simmetrie del solido platonico S che fissano un vertice e ruotano gli spigoli su di lui incidenti, il poligono euclideo P è regolare. Quindi ha angoli interni $\frac{n-2}{n}\pi$.

L'angolo diedrale di uno spigolo e di $S(-\infty)$ incidente su v è misurato intersecando e con un piano iperbolico P ortogonale ad e in un qualsiasi punto $p = P \cap e$. Poiché l'orosfera O passante per p è tangente a P , si ottiene lo stesso angolo $\theta(-\infty) = \frac{n-2}{n}\pi$. D'altra parte $S(\frac{\pi}{2})$ è una semisfera in cui tutti gli angoli diedrali sono π , quindi $\theta(\frac{\pi}{2}) = \pi$. \square

Identificando opportunamente le facce di un solido platonico con il giusto angolo diedrale è possibile costruire alcune varietà iperboliche (piatte, ellittiche) particolari.

ESEMPIO 1.26. Identificando le facce opposte di un cubo euclideo si ottiene il toro euclideo $S^1 \times S^1 \times S^1$.

ESEMPIO 1.27. Le facce opposte di un dodecaedro regolare sono due pentagoni, come si vede in Fig. 7-(destra). Questi possono essere identificati essenzialmente in tre modi: tramite una rotazione (oraria o antioraria) di angolo $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$ oppure π . Se identifichiamo tutte le facce opposte con una rotazione antioraria di angolo $\frac{\pi}{5}$ otteniamo una 3-varietà chiusa importante, nota come *sfera di Poincaré*. L'orbita di uno spigolo in questa identificazione è formata da 3 spigoli. L'angolo diedrale del dodecaedro piatto è approssimativamente 116° . È quindi possibile utilizzare

un dodecaedro sferico con angolo diedrale $\theta = \frac{2\pi}{3}$ per questa identificazione e costruire una struttura di varietà ellittica sulla sfera di Poincaré. Analogamente con la rotazione di angolo π l'orbita di uno spigolo è formata da due soli spigoli ed il dodecaedro sferico con angolo π (che è una semisfera) può essere usato per dare una struttura ellittica alla varietà risultante, che è semplicemente lo spazio proiettivo \mathbb{RP}^3 ottenuto usualmente quozientando il bordo della semisfera tramite mappa antipodale.

Analogamente, se identifichiamo tutte le facce opposte con una rotazione antioraria di angolo $\frac{3\pi}{5}$ otteniamo un'altra 3-varietà chiusa, nota come *spazio di Seifert-Weber*. In questo caso l'orbita di uno spigolo consta di 5 spigoli, ed usando un dodecaedro iperbolico con angolo diedrale pari a $\frac{2\pi}{5}$ si ottiene una struttura iperbolica sullo spazio di Seifert-Weber.

Sollevando i dodecaedri nei due esempi al loro rivestimento universale, otteniamo una tassellazione in dodecaedri regolari di S^3 e \mathbb{H}^3 . La tassellazione di S^3 consta di 120 tetraedri, pari al numero di elementi del gruppo fondamentale della sfera di Poincaré. L'importanza della sfera di Poincaré sta nel fatto che è l'unica 3-varietà chiusa con gruppo fondamentale finito che sia anche una *sfera di omologia*, cioè che abbia la stessa omologia di S^3 . In particolare, il suo gruppo fondamentale ha abelianizzato banale.

Parlare qui della congettura di Poincaré?

1.8. Semplessi. La costruzione appena descritta per i solidi platonici si applica ai politopi regolari di ogni dimensione: ci occuperemo in particolare dei *simplessi regolari*. In ogni dimensione n è possibile prendere un punto qualsiasi di \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n o S^n e dei vettori unitari $v_0, \dots, v_n \in T_x$ che siano vertici di un simpleso regolare in $T_x \cong \mathbb{R}^n$ e definire per ogni $t \in [-\infty, \frac{\pi}{2}]$ il *simpleso regolare* $\Delta(t)$. Il punto x è il baricentro del simpleso. Per $t = -\infty$ otteniamo un simpleso regolare *ideale* in \mathbb{H}^n .

1.9. Dominio di Dirichlet. Abbiamo costruito alcune 3-varietà iperboliche identificando a coppie le facce di un politopo in \mathbb{H}^n . Mostriamo adesso che qualsiasi 3-varietà iperbolica chiusa può essere costruita in questo modo.

Sia $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ una varietà iperbolica chiusa e $x_0 \in M$ un punto. La controimmagine $p^{-1}(x_0)$ rispetto al rivestimento universale $p: \mathbb{H}^n \rightarrow M$ è un insieme discreto di punti in \mathbb{H}^n , su cui Γ agisce in modo libero e transitivo. Per ogni punto $x \in p^{-1}(x_0)$ definiamo il *dominio di Dirichlet* come l'insieme

$$D(x) = \{y \in \mathbb{H}^n \mid d(y, x) \leq d(y, x') \forall x' \in p^{-1}(x_0)\}.$$

PROPOSIZIONE 1.28. *Il dominio di Dirichlet $D(x)$ è un politopo, ed è un dominio fondamentale per l'azione di Γ . I domini $D(x)$ al variare di $x \in p^{-1}(x_0)$ formano una tassellazione invariante per Γ .*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione $D(x)$ è l'intersezione al variare di $x' \in p^{-1}(x_0)$ di tutti i semispazi

$$S_{x'} = \{y \in \mathbb{H}^n \mid d(y, x) \leq d(y, x')\}.$$

L'insieme $p^{-1}(x_0)$ è discreto, quindi interseca ogni insieme limitato di \mathbb{H}^n in un numero finito di punti. Questo fatto implica che l'intersezione fra semispazi sia localmente finita. Quindi la parte interna di $D(x)$ è l'intersezione dei semispazi aperti

$$\dot{S}_{x'} = \{y \in \mathbb{H}^n \mid d(y, x) < d(y, x')\}.$$

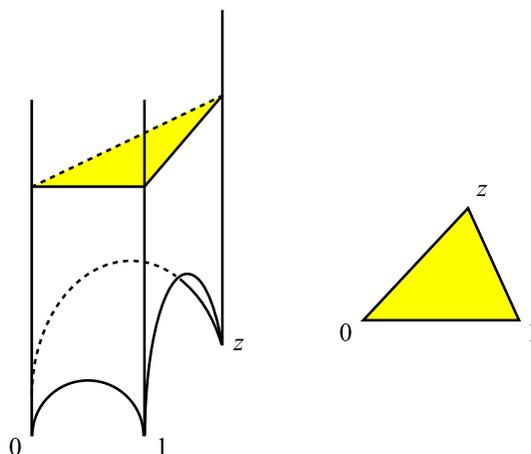


FIGURA 8. Un tetraedro ideale con un tre vertici in $0, 1, \infty$ nel modello del semispazio è determinato dalla posizione z del quarto vertice nel bordo $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Una piccola orosfera centrata nel vertice ideale interseca il tetraedro in un triangolo euclideo univocamente determinato a meno di similitudine.

I punti interni di $D(x)$ sono quindi precisamente i punti che sono strettamente più vicini a x che agli altri punti di $p^{-1}(x_0)$. Segue dalle definizioni che

$$D(\gamma(x)) = \gamma(D(x))$$

per ogni $\gamma \in \Gamma$ e $x \in p^{-1}(x_0)$ e che i domini $D(x)$ tassellano lo spazio. In particolare ciascun $D(x)$ è un dominio fondamentale per Γ .

Dimostrare bene che compatto implica limitato.

Se M è compatta allora $D(x)$ è limitato. Poiché l'intersezione è localmente finita, è anche globalmente finita, quindi $D(x)$ è un politopo. \square

1.10. Tetraedri ideali. I tetraedri ideali giocano un ruolo fondamentale nella costruzione di 3-varietà iperboliche. Vediamo innanzitutto che esiste un metodo geometrico semplice per associare un tetraedro ideale ad ogni numero complesso z con $\Im z > 0$.

Un tetraedro ideale è l'involuppo convesso di quattro punti v_1, v_2, v_3, v_4 in $\partial\mathbb{H}^3$. Il tetraedro è *degenere* se i quattro punti sono complanari. Supponiamo che il tetraedro non sia degenere. Ricordiamo che $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ e che quindi esiste un'unica isometria che preserva l'orientazione di \mathbb{H}^3 e manda v_1, v_2, v_3 rispettivamente in $0, 1, \infty \in \partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ usando il modello del semispazio. Il quarto punto è un numero complesso z , e a meno di specchiare lungo il piano passante per $0, 1, \infty$ possiamo supporre che $\Im z > 0$.⁷

Ricordiamo che una orosfera centrata nel punto all'infinito è nel modello del semispazio un piano orizzontale che possiamo identificare con \mathbb{C} . Intersecando il tetraedro con una orosfera possiamo ottenere un triangolo come in Fig. 8, di vertici $0, 1, z$. Il triangolo è univocamente determinato a meno di similitudini, e quindi sono univocamente determinati i rapporti

$$z, \frac{z-1}{z}, \frac{1}{1-z}$$

⁷Il numero complesso z è il *birapporto* dei quattro punti v_1, v_2, v_3, v_4 usato in geometria proiettiva.

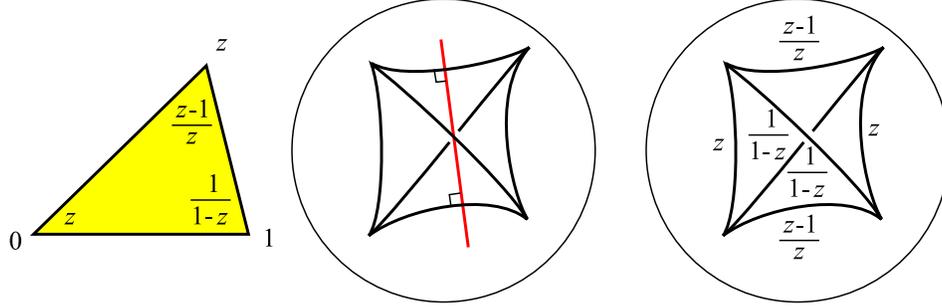


FIGURA 9. Per ogni vertice ideale c'è un triangolo euclideo definito a meno di similitudini; si può associare in modo univoco ad ogni angolo un numero complesso la cui fase è l'angolo e il cui modulo è il rapporto fra le lunghezze dei lati adiacenti (sinistra). Ogni coppia di spigoli opposti ha un asse che è un asse di simmetria per il tetraedro ideale (centro). Il tetraedro a meno di isometria è identificato associando un numero complesso ad ogni spigolo come mostrato in figura (destra). La fase di questo numero complesso è l'angolo diedrale dello spigolo.

fra i due lati del triangolo uscenti da un vertice, visti come numeri complessi. L'argomento di ciascun numero è l'angolo interno, ed il modulo è il rapporto fra le lunghezze dei due segmenti adiacenti. Assegniamo i tre numeri complessi agli angoli del triangolo come in Fig. 9. Notiamo adesso che il tetraedro ideale ha sempre delle simmetrie non banali.

PROPOSIZIONE 1.29. *Per ogni coppia di lati opposti di un tetraedro ideale non degenera T esiste un'asse r di simmetria ortogonale ad entrambi come in Fig. 9-(centro) tale che T sia simmetrico rispetto ad una rotazione di π intorno a r .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché T è non degenera i due lati e ed e' sono due rette di \mathbb{H}^3 ultraparallele. Quindi esiste un'unica retta r di \mathbb{H}^3 ortogonale ad e e e' . Una rotazione di π intorno a r scambia i vertici di e e di e' e preserva l'insieme dei 4 vertici, quindi preserva T . \square

Le simmetrie del tetraedro quindi agiscono in modo transitivo sui vertici. Ne segue che ogni vertice ha una sezione triangolare simile a quella mostrata in Fig. 9-(sinistra), e che tutte le sezioni possono essere riassunte assegnando i numeri complessi direttamente agli spigoli del tetraedro come in Fig. 9-(destra). Questo sistema di numeri complessi identifica completamente il tetraedro ideale a meno di isometrie di \mathbb{H}^3 .

1.11. Triangolazioni ideali ed equazioni di completezza. Siano $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ alcuni tetraedri iperbolici ideali non degeneri. Come abbiamo visto, ogni spigolo di ciascun Δ_i ha un ben definito numero complesso con parte immaginaria positiva. Tentiamo adesso di costruire una 3-varietà iperbolica incollando fra loro questi tetraedri. Scegliamo quindi ad esempio di incollare una faccia f_i di Δ_i con una faccia f_j di Δ_j . Quante possibilità abbiamo? La risposta è semplice.

PROPOSIZIONE 1.30. *Dati due triangoli ideali Δ e Δ' , ogni corrispondenza biunivoca fra i vertici ideali di Δ e quelli di Δ' è realizzata da un'unica isometria $\Delta \cong \Delta'$.*

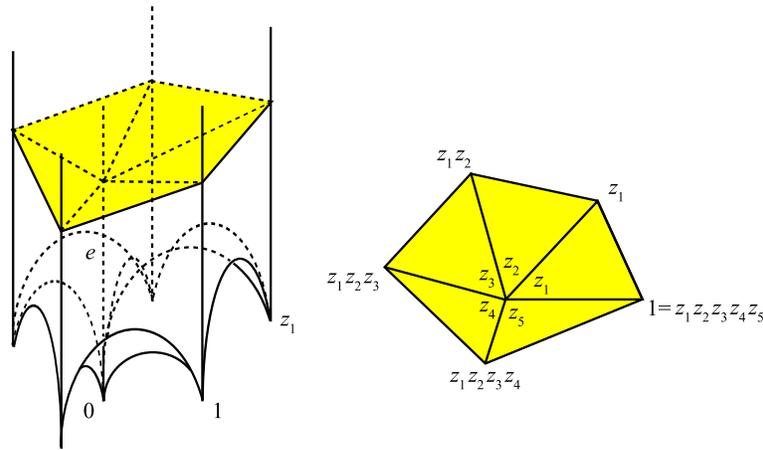


FIGURA 10. Se riusciamo ad attaccare tutti i tetraedri incidenti su uno spigolo e dentro \mathbb{H}^3 come mostrato a sinistra, la struttura iperbolica è definita anche sullo spigolo e . Siano z_1, \dots, z_h i numeri complessi associati agli spigoli degli h tetraedri incidenti (in figura $h = 5$). La condizione perché l'incollamento possa essere fatto come in figura è che $z_1 \cdots z_h$ sia uguale a uno (destra).

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto abbiamo già notato che i triangoli ideali sono tutti isometrici, perché $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ agisce transitivamente sulle terne ordinate di punti in $\partial\mathbb{H}^2$. Quindi esiste almeno una isometria $\Delta \cong \Delta'$ che realizza la corrispondenza biunivoca data fra i vertici. D'altra parte questa isometria è unica: ogni lato l di un triangolo ideale ha un intrinseco "punto medio", definito come l'unico punto $p \in l$ per cui esiste una geodetica ortogonale a l che unisce p e il vertice ideale opposto del triangolo. Una isometria del triangolo ideale in sé che fissa i vertici ideali deve anche fissare ciascuno dei tre punti medi, e quindi fissa tutto. \square

Quindi esiste un'unica isometria che incollì le due facce f_i e f_j dopo aver scelto arbitrariamente come identificare le due terne di vertici ideali. Possiamo quindi scegliere una arbitraria identificazione a coppie delle $4k$ facce dei k tetraedri ideali, e l'incollamento produrrà uno spazio topologico che ha una struttura di varietà iperbolica nel complementare degli spigoli. Per semplificare la discussione, incolliamo le facce usando soltanto mappe che invertono l'orientazione, così siamo sicuri di ottenere una varietà iperbolica orientata.

Tentiamo adesso di estendere la struttura iperbolica agli spigoli. Se riusciamo ad incollare tutti i tetraedri adiacenti ad uno spigolo e dentro \mathbb{H}^3 come mostrato in Fig. 10 siamo a posto. Siano z_1, \dots, z_h i numeri complessi associati agli spigoli degli h tetraedri incidenti su e . Come mostrato in figura, se $z_1 \cdots z_h = 1$ tutti i tetraedri possono essere incollati contemporaneamente in \mathbb{H}^3 e quindi una struttura iperbolica si estende anche allo spigolo e . Notiamo che l'equazione $z_1 \cdots z_h = 1$ in realtà non è sufficiente: vogliamo anche che la somma degli argomenti dei z_i sia 2π e non un arbitrario multiplo di 2π .

Possiamo quindi scegliere arbitrariamente uno spigolo per ogni semplice Δ_i e associare a questo spigolo la variabile z_i ; gli altri spigoli di Δ_i avranno automaticamente associata una delle variabili z_i , $\frac{z_i-1}{z_i}$ oppure $\frac{1}{1-z_i}$. Come abbiamo visto, per

ciascun spigolo e otteniamo una equazione del tipo $z_1 \cdots z_h = 1$ (cui va aggiunta la condizione che la somma degli argomenti sia 2π). Abbiamo quindi ottenuto un sistema di equazioni, dette *equazioni di compatibilità*, con una variabile per ogni tetraedro e una equazione per ogni spigolo che risulta dopo l'incollamento. Dalla discussione discende il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 1.31. *Ogni soluzione delle equazioni di compatibilità identifica una struttura iperbolica sulla varietà M ottenuta incollando i tetraedri ideali.*

La struttura iperbolica però non è necessariamente completa. Notiamo infatti che la varietà che otteniamo non è compatta, perché i tetraedri ideali non lo sono. Lo studio del completamento di questa varietà è un aspetto cruciale della geometria iperbolica in dimensione 3 e sarà oggetto del prossimo capitolo.

2. Completamenti metrici e varietà con singolarità coniche

Da fare: parlare qui di varietà con singolarità coniche e Dehn filling.

Teorema di rigidità di Mostow

Abbiamo definito nel Capitolo 2 lo spazio di Teichmüller $\text{Teich}(\Sigma_g)$ di una superficie Σ_g chiusa di genere $g \geq 2$ come lo spazio delle metriche iperboliche su Σ_g , viste a meno di isometrie isotope all'identità; abbiamo quindi dimostrato che $\text{Teich}(\Sigma_g) \cong \mathbb{R}^{6g-6}$.

La definizione di $\text{Teich}(M)$ si applica ad ogni varietà differenziabile M : Lo scopo di questa sezione è mostrare che per ogni varietà iperbolica di dimensione ≥ 3 lo spazio $\text{Teich}(M)$ è un punto. Questo risultato molto forte, noto come *teorema di rigidità*, è stato dimostrato da Mostow nel 1968. Grazie a questo teorema, tutte le informazioni geometriche inerenti una varietà iperbolica M di dimensione ≥ 3 (volume, spettro delle geodetiche, etc.) dipendono in realtà soltanto dalla topologia di M . Nella versione più forte del teorema di Mostow, vedremo addirittura che dipendono solo dal gruppo fondamentale di M .

1. Volumi di varietà iperboliche

1.1. Semplessi. Ricordiamo che un *simplesso* Δ in $\overline{\mathbb{H}^n}$ è l'involuppo convesso di $n+1$ punti $v_0, \dots, v_n \in \overline{\mathbb{H}^n}$. Il simplesso è:

- *degenere* se gli $n+1$ punti sono contenuti nella chiusura di un iperpiano,
- *ideale* se gli $n+1$ punti sono tutti nel bordo $\partial\mathbb{H}^n$,

Una *k-faccia* di un simplesso non-degenere Δ è l'involuppo convesso di $k+1$ vertici distinti di Δ . Le 0- e 1-facce sono dette *vertici* e *spigoli*. Un vertice che giace in $\partial\mathbb{H}^n$ è detto *ideale*.

PROPOSIZIONE 1.1. *Un simplesso è degenere \Leftrightarrow non ha parte interna \Leftrightarrow ha volume nullo.*

DIMOSTRAZIONE. Se un simplesso è degenere, allora non ha parte interna e non ha volume. D'altra parte, si può dimostrare per induzione sulla dimensione n che se un simplesso non è degenere allora ha parte interna, e quindi volume positivo. Il passaggio induttivo funziona nel modo seguente: sia v un vertice di Δ e F la $(n-1)$ -faccia opposta. Per ipotesi la faccia F è contenuta in un unico iperpiano H e ha parte interna. Poiché $v \notin F$ segue facilmente che anche Δ ha parte interna. \square

Notiamo che un simplesso è compatto se e solo se tutti i suoi vertici sono in \mathbb{H}^n . Mostriamo che ogni simplesso ha volume finito: per quelli compatti è ovvio, per gli altri è conseguenza del fatto seguente.

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia O una sfera centrata in un punto $v \in \partial\mathbb{H}^n$. Sia $D \subset O$ un insieme boreliano e C il cono di D su v , ovvero l'unione di tutte le semirette uscenti da D dirette verso v (si veda Fig. 1). Vale la relazione seguente:*

$$\text{Vol}(C) = \frac{\text{Vol}_O(D)}{n-1}$$

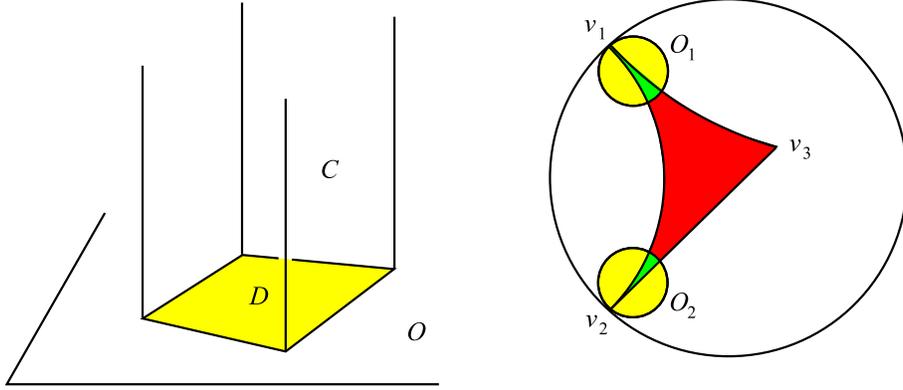


FIGURA 1. Nel modello del semispazio, un boreliano D dentro ad una orosfera O delimita una porzione di spazio C . In dimensione tre vale la formula $\text{Vol}(C) = 2 \cdot \text{Area}(D)$; in generale vale $\text{Vol}(C) = (n-1) \cdot \text{Vol}_O(D)$ dove Vol_O indica il volume nell'orosfera O , isometria ad \mathbb{R}^{n-1} . Ne deduciamo che un semplice Δ ha volume infinito: l'intersezione (in verde) di Δ con delle orosfere O_i centrate nei vertici ideali v_i ha infatti volume finito, e ciò che resta (in rosso) è compatto.

dove Vol_O indica il volume nella varietà O , isometrica a \mathbb{R}^{n-1} .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il modello del semispazio con v all'infinito e O ad altezza h come in Fig. 1-(sinistra). Otteniamo

$$\text{Vol}(C) = \int_D dx \int_h^\infty \frac{1}{t^n} dt = \frac{1}{n-1} \int_D \frac{dx}{h^{n-1}} = \frac{1}{n-1} \cdot \text{Vol}_O(D).$$

□

Applichiamo in particolare questa uguaglianza per ottenere in Fig. 1-(destra) il risultato seguente.

COROLLARIO 1.3. *Un semplice in $\overline{\mathbb{H}^n}$ ha volume finito.*

Definiamo v_n come il sup dei volumi di tutti i semplici in \mathbb{H}^n :

$$v_n = \sup \{ \text{Vol}(\Delta) \mid \Delta \subset \overline{\mathbb{H}^n} \}.$$

È abbastanza facile vedere che $v_n < +\infty$. Il risultato seguente è meno banale. Ricordiamo che nella Sezione 1.8 del Capitolo 3 abbiamo definito per ogni $t \in [-\infty, 0)$ un semplice regolare $\Delta(t) \subset \mathbb{H}^n$, che è ideale per $t = -\infty$.

TEOREMA 1.4. *Un semplice Δ ha volume v_n se e solo se Δ è ideale e regolare.*

I semplici ideali regolari sono quindi i semplici con volume massimo. In dimensione $n = 2$ il teorema è semplice da dimostrare: l'area di un triangolo con angoli interni α, β, γ è $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, ed è massima precisamente quando $\alpha = \beta = \gamma = 0$, cioè quando il triangolo è ideale; d'altra parte, tutti i triangoli ideali sono isometrici e sono quindi regolari. In dimensione n il semplice di volume massimo è comunque chiaramente ideale:

PROPOSIZIONE 1.5. *Se Δ è un semplice non ideale, esiste un semplice ideale $\Delta' \supset \Delta$ con $\text{Vol}(\Delta') > \text{Vol}(\Delta)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in \mathbb{H}^n$ un punto qualsiasi contenuto in Δ ma distinto dai vertici v_0, \dots, v_n . La semiretta s_i uscente da x e passante per v_i tende ad un punto all'infinito $w_i \in \partial\mathbb{H}^n$. Definiamo quindi Δ' come involuppo convesso dei punti w_0, \dots, w_n . Il semplice Δ' contiene Δ , perché contiene x e w_i , quindi contiene la semiretta s_i ed in particolare v_i per ogni i . Per ipotesi almeno uno dei vertici v_i non è ideale, e quindi $w_i \notin \Delta$: quindi Δ' contiene Δ strettamente e quindi ha volume maggiore. \square

In dimensione $n \geq 3$ i semplici ideali però non sono tutti isometrici: abbiamo già visto ad esempio che per $n = 3$ questi possono essere parametrizzati da un numero complesso z . Dimostreremo il Teorema 1.4 solo in dimensione $n = 3$.

1.2. Volumi di tetraedri ideali. Esprimeremo il volume di un tetraedro ideale usando una particolare funzione.

DEFINIZIONE 1.6. La *funzione di Lobachevsky* è la funzione

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt.$$

La funzione $\log |2 \sin t|$ vale $-\infty$ in $\pi\mathbb{Z}$, ma è comunque integrabile. Quindi Λ è ben definita su tutto \mathbb{R} , è continua e le sue prime due derivate sono ovviamente

$$\Lambda'(\theta) = - \log |2 \sin \theta|, \quad \Lambda''(\theta) = - \cot \theta.$$

La funzione Λ ha derivata $+\infty$ nei punti $\pi\mathbb{Z}$. È inoltre una funzione dispari, perché è integrale di una funzione pari.

PROPOSIZIONE 1.7. *La funzione Λ è π -periodica. Vale $\Lambda(0) = \Lambda(\frac{\pi}{2}) = \Lambda(\pi) = 0$. La funzione Λ è strettamente positiva in $(0, \frac{\pi}{2})$, strettamente negativa in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, ed ha massimo e minimo assoluti in $\frac{1}{6}\pi$ e $\frac{5}{6}\pi$. Vale inoltre per ogni $m \in \mathbb{N}$ l'uguaglianza*

$$\Lambda(m\theta) = m \sum_{k=0}^{m-1} \Lambda\left(\theta + \frac{k\pi}{m}\right).$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo a dimostrare l'uguaglianza per $m = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda(2\theta)}{2} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\theta} \log |2 \sin t| dt = - \int_0^\theta \log |2 \sin 2t| dt \\ &= - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt - \int_0^\theta \log \left| 2 \sin \left(t + \frac{\pi}{2}\right) \right| dt \\ &= \Lambda(\theta) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \theta} \log |2 \sin t| dt \\ &= \Lambda(\theta) + \Lambda\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Ponendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ottiene $\Lambda(\pi) = 0$. Poiché la derivata Λ' è π -periodica e $\Lambda(\pi) = 0$, ne segue che anche Λ è π -periodica. Poiché Λ è π -periodica e dispari, vale $\Lambda(\frac{\pi}{2}) = 0$. Così abbiamo anche dimostrato la formula per $m = 2$.

Per dimostrare la formula per m generico usiamo una generalizzazione della formula di duplicazione del seno. Usando l'uguaglianza

$$z^m - 1 = \prod_{k=0}^{m-1} \left(z - e^{-\frac{2\pi ik}{m}} \right)$$

Mettere grafico della funzione.

si deduce facilmente la formula

$$2 \sin(mt) = \prod_{k=0}^{m-1} 2 \sin\left(t + \frac{k\pi}{m}\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda(m\theta)}{m} &= -\frac{1}{m} \int_0^{m\theta} \log |2 \sin t| dt = -\int_0^\theta \log |2 \sin(mt)| dt \\ &= -\sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\theta \log \left| 2 \sin\left(t + \frac{k\pi}{m}\right) \right| dt \\ &= -\sum_{k=0}^{m-1} \left(\int_0^{\theta + \frac{k\pi}{m}} \log |2 \sin t| dt - \int_0^{\frac{k\pi}{m}} \log |2 \sin t| dt \right) \\ &= -\sum_{k=0}^{m-1} \Lambda\left(\theta + \frac{k\pi}{m}\right) + C(m) \end{aligned}$$

dove $C(m)$ è una costante che non dipende da θ . Integrando entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\frac{1}{m} \int_0^\pi \Lambda(m\theta) = -\sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\pi \Lambda\left(\theta + \frac{k\pi}{m}\right) + C(m)\pi.$$

Poiché Λ è dispari e π -periodica, vale però

$$\int_0^\pi \Lambda(m\theta) = 0$$

per ogni intero m . Quindi $C(m) = 0$ e la formula nell'enunciato è dimostrata per ogni m . Notiamo infine che $\Lambda''(\theta) = -\cot \theta$ è strettamente negativa in $(0, \frac{\pi}{2})$ e strettamente positiva in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, quindi Λ è strettamente positiva in $(0, \frac{\pi}{2})$ e strettamente negativa in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. \square

Ricordiamo che un tetraedro ideale è determinato a meno di isometria dalla terna di numeri complessi

$$\left\{ z, \frac{z-1}{z}, \frac{1}{1-z} \right\}$$

i cui argomenti α, β, γ sono gli angoli diedrali come in Fig. 2; vale la relazione $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Quindi un tetraedro ideale è determinato a meno di isometria dalla terna di angoli $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ con somma π . La terna che corrisponde al tetraedro ideale regolare è quella in cui gli angoli sono uguali, e cioè $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$.

TEOREMA 1.8. *Sia Δ un tetraedro ideale con angoli diedrali α, β e γ . Vale*

$$\text{Vol}(\Delta) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma).$$

DIMOSTRAZIONE. Rappresentiamo Δ nel modello del semispazio con un vertice v_0 all'infinito e gli altri tre v_1, v_2, v_3 in \mathbb{C} . Sia C la circonferenza che contiene i tre vertici v_1, v_2 e v_3 . A meno di trasformazioni in $\mathbb{P}\text{SL}_2(\mathbb{C})$ possiamo supporre che C abbia centro l'origine e raggio unitario. Il triangolo $T \subset \mathbb{C}$ con vertici v_1, v_2 e v_3 ha angoli interni α, β e γ . Supponiamo inizialmente che $0 \in T$, cioè che $\alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$.

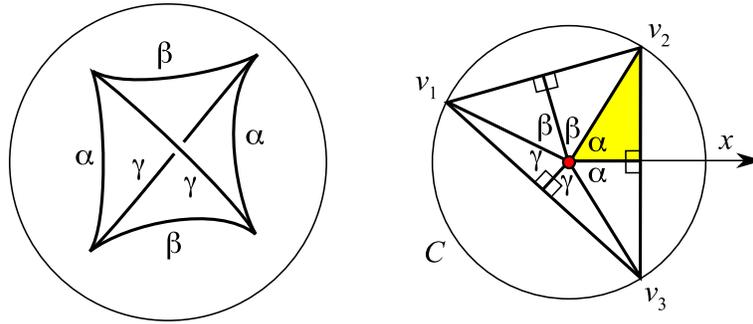


FIGURA 2. Gli angoli diedrali α, β, γ di un tetraedro ideale. Spigoli opposti hanno angoli diedrali uguali, e inoltre $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Decomponiamo T in sei triangoli rettangoli come in Fig. 2, a coppie isometrici. Il tetraedro Δ si decompone in modo corrispondente in sei tetraedri, a coppie isometrici, ciascuno posizionato sopra ad uno dei sei triangoli nel semispazio. Mostriamo che il tetraedro Δ_α corrispondente al triangolo colorato in giallo in Fig. 2 ha volume $\frac{\Lambda(\alpha)}{2}$: sommando quindi i contributi dei sei tetraedri si ottiene il teorema.

Il tetraedro corrispondente al triangolo colorato è intersezione di quattro semispazi: tre semispazi verticali determinati dagli iperpiani $y = 0$, $x = \cos \alpha$ e $y = x \tan \alpha$ ed il semispazio bordato dall'iperpiano iperbolico con bordo C , cioè la semisfera $z^2 = x^2 + y^2$. Quindi

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Delta_\alpha) &= \int_0^{\cos \alpha} dx \int_0^{x \tan \alpha} dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\infty} \frac{1}{z^3} dz \\ &= \int_0^{\cos \alpha} dx \int_0^{x \tan \alpha} dy \left[-\frac{1}{2z^2} \right]_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\cos \alpha} dx \int_0^{x \tan \alpha} \frac{1}{1-x^2-y^2} dy. \end{aligned}$$

Per risolvere questo integrale usiamo la relazione

$$\frac{1}{1-x^2-y^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}-y} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+y} \right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Delta_\alpha) &= \frac{1}{4} \int_0^{\cos \alpha} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left(\left[-\log(\sqrt{1-x^2}-y) \right]_0^{x \tan \alpha} + \left[\log(\sqrt{1-x^2}+y) \right]_0^{x \tan \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\cos \alpha} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left(-\log(\sqrt{1-x^2}-x \tan \alpha) + \log(\sqrt{1-x^2}+x \tan \alpha) \right). \end{aligned}$$

Cambiando $x = \cos t$ e quindi $dx = -\sin t dt$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(\Delta_\alpha) &= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{-\sin t}{\sin t} \left(-\log \frac{\sin t \cos \alpha - \cos t \sin \alpha}{\sin t \cos \alpha + \cos t \sin \alpha} \right) dt \\
&= -\frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \log \frac{\sin(t+\alpha)}{\sin(t-\alpha)} dt = -\frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \log \frac{|2 \sin(t+\alpha)|}{|2 \sin(t-\alpha)|} dt \\
&= \frac{1}{4} \int_{2\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \log |2 \sin t| dt - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \log |2 \sin t| dt \\
&= \frac{1}{4} \left(-\Lambda \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \Lambda(2\alpha) + \Lambda \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(-\Lambda \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 2\Lambda(\alpha) + 2\Lambda \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \Lambda \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right) = \frac{1}{2} \Lambda(\alpha)
\end{aligned}$$

usando la Proposizione 1.7 nel penultimo passaggio.

Se $0 \notin T$ il triangolo T può comunque essere decomposto in triangoli rettangoli, alcuni dei quali contribuiscono negativamente al volume e si ottiene la stessa formula. \square

Otteniamo come corollario il Teorema 1.4 in dimensione $n = 3$.

COROLLARIO 1.9. *Un tetraedro ideale ha volume v_3 se e solo se è ideale e regolare.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il triangolo $T = \{0 \leq \alpha, \beta, \alpha + \beta \leq \pi\}$ e la funzione continua $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ seguente:

$$f: (\alpha, \beta) \mapsto \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\pi - \alpha - \beta).$$

Su ∂T la funzione f è nulla, mentre nei punti interni $f(\alpha, \beta)$ è strettamente positiva perché coincide con il volume del tetraedro ideale con angoli diedrali $\alpha, \beta, \gamma = \pi - \alpha - \beta$. Quindi f ha almeno un punto di massimo (α, β) all'interno di T . Inoltre f è differenziabile all'interno di T , quindi sul punto di massimo deve annullarsi il gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \Lambda'(\alpha) - \Lambda'(\pi - \alpha - \beta) \\ \Lambda'(\beta) - \Lambda'(\pi - \alpha - \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\log |2 \sin \alpha| + \log |2 \sin(\pi - \alpha - \beta)| \\ -\log |2 \sin \beta| + \log |2 \sin(\pi - \alpha - \beta)| \end{pmatrix}$$

e questo accade se e solo se $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin \beta$, cioè se e solo se il tetraedro ha tutti gli angoli diedrali uguali a $\frac{\pi}{3}$, cioè se e solo se è regolare. \square

1.3. Volume simpliciale. Gromov ha introdotto negli anni 70 una misura di “volume” di una varietà chiusa M che fa uso soltanto dell'omologia di M , e non fa uso di eventuali strutture riemanniane o perfino differenziabili su M . Vedremo poi che sorprendentemente questa nozione di volume coincide (a meno di un fattore) con quella riemanniana quando M è iperbolica.

Sia X uno spazio topologico e A un anello. Ricordiamo che un k -simpleso singolare è una mappa $\alpha: \Delta_k \rightarrow X$ continua dal simpleso standard k -dimensionale Δ_k in X . Una k -catena è una combinazione lineare astratta

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_h \alpha_h$$

di k -simplessi singolari $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ a coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in A$. L'insieme $C_k(X, A)$ delle k -catene è un A -modulo. È definita inoltre una mappa di bordo $\partial_k: C_k(X, A) \rightarrow$

$C_{k-1}(X, A)$ lineare tale che $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$. I *cicli* e i *bordi* sono definiti rispettivamente come i sottomoduli

$$Z_k(X, A) = \ker \partial_k, \quad B_k(X, A) = \text{Im } \partial_{k+1}.$$

I bordi sono un sottomodulo dei cicli e si definisce infine il k -esimo *gruppo di omologia* come il quoziente

$$H_k(X, A) = Z_k(X, A) / B_k(X, A).$$

Consideriamo ora il caso $A = \mathbb{R}$. Possiamo definire la *norma* di un ciclo $\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_h \alpha_h$ nel modo seguente:

$$|\alpha| = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_h|.$$

DEFINIZIONE 1.10. La *norma* di una classe $a \in H_k(X, \mathbb{R})$ è il limite inferiore delle norme dei suoi rappresentanti:

$$|a| = \inf \{ |\alpha| \mid \alpha \in Z_k(X, \mathbb{R}), [\alpha] = a \}.$$

Ricordiamo che una *seminorma* su uno spazio vettoriale reale V è una mappa $|\cdot|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che

- $|\lambda v| = |\lambda| |v|$ per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e vettore $v \in V$,
- $|v + w| \leq |v| + |w|$ per ogni coppia di vettori $v, w \in V$.

Una *norma* è generalmente definita come una seminorma in cui l'unico vettore v con $|v| = 0$ è il vettore nullo. Il fatto seguente si dimostra immediatamente.

PROPOSIZIONE 1.11. *La norma $|\cdot|$ appena definita induce una seminorma sullo spazio vettoriale $H_k(X, \mathbb{R})$.*

Sia adesso M una varietà chiusa connessa orientata. Sappiamo in questo caso che $H_n(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ e l'orientazione di M determina uno dei due generatori di $H_n(M, \mathbb{Z})$; questo generatore è detto *classe fondamentale* ed è indicato con $[M]$. Inoltre $H_n(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ ed esiste una naturale inclusione (dovuta ad esempio al teorema dei coefficienti universali)

$$\mathbb{Z} \cong H_n(M, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_n(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

quindi la classe fondamentale $[M]$ è anche un elemento di $H_n(M, \mathbb{R})$ ed ha quindi una determinata norma.

DEFINIZIONE 1.12. Il *volume simpliciale* $\|M\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ di una varietà chiusa orientata M è la norma della sua classe fondamentale:

$$\|M\| = |[M]|$$

Poiché $|[M]| = |- [M]|$ il volume simpliciale in realtà non dipende dall'orientazione di M . La definizione di $\|M\|$, relativamente semplice, porta subito a risultati non banali.

Ricordiamo che una mappa continua $f: X \rightarrow Y$ fra spazi topologici induce un omomorfismo $f_*: H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, A)$ fra i k -esimi gruppi di omologia. Una mappa continua $f: M \rightarrow N$ fra varietà chiuse e orientate induce quindi un omomorfismo $f_*: H_n(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(N, \mathbb{Z})$ che manda necessariamente la classe fondamentale $[M]$ in un multiplo della classe fondamentale $[N]$. Il *grado* di f è definito proprio come questo multiplo, cioè come l'unico intero $\deg f$ per cui

$$f_*([M]) = \deg f \cdot [N].$$

PROPOSIZIONE 1.13. *Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa continua fra varietà chiuse orientate. Vale la disuguaglianza*

$$\|M\| \geq |\deg f| \cdot \|N\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Ogni descrizione di $[M]$ come ciclo $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_h\alpha_h$ induce una descrizione di $f_*([M]) = \deg f[M]$ come ciclo $\lambda_1f \circ \alpha_1 + \dots + \lambda_hf \circ \alpha_h$, avente la stessa norma. \square

COROLLARIO 1.14. *Se M e N sono due varietà chiuse orientabili omotopicamente equivalenti della stessa dimensione allora $\|M\| = \|N\|$.*

DIMOSTRAZIONE. Una equivalenza omotopica è il dato di due mappe $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow M$ le cui composizioni siano entrambe omotope all'identità. In particolare sia f che g hanno grado ± 1 . \square

COROLLARIO 1.15. *Se M ammette una mappa continua $f: M \rightarrow M$ con grado ≥ 2 allora $\|M\| = 0$.*

COROLLARIO 1.16. *Una sfera S^n ha norma zero. Più in generale vale $\|M \times S^n\| = 0$ per ogni M e ogni $n \geq 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Una sfera S^n ammette mappe in sé di grado arbitrariamente alto, e queste mappe si estendono banalmente a $M \times S^n$. \square

Fra le superfici orientabili, la sfera S^2 ed il toro $S^1 \times S^1$ hanno quindi entrambe volume simpliciale nullo. Vedremo successivamente che tutte le altre superfici chiuse orientabili hanno però volume simpliciale positivo. Nel caso in cui la mappa continua sia un rivestimento, la disuguaglianza della Proposizione 1.13 diventa un'uguaglianza.

PROPOSIZIONE 1.17. *Se $f: M \rightarrow N$ è un rivestimento di grado d allora*

$$\|M\| = d \cdot \|N\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto ricordiamo che il grado d di un rivestimento f coincide con il grado di f come mappa definito sopra. Sappiamo già che $\|M\| \geq d \cdot \|N\|$ perché un ciclo in M può essere trasportato in N tramite f . Nei rivestimenti i cicli però anche essere riportati indietro tramite f : sia $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_h\alpha_h$ un ciclo in N che rappresenta $[N]$; ogni α_i è una mappa $\Delta_n \rightarrow N$. Poiché Δ_n è semplicemente connesso, la mappa α_i si solleva a d mappe distinte $\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^d: \Delta_n \rightarrow N$ tali che $\alpha_i = f \circ \alpha_i^j$. Si vede facilmente che $\tilde{\alpha} = \sum_{ij} \lambda_i \alpha_i^j$ è un ciclo in M e che $f_*(\tilde{\alpha}) = d\alpha$. Quindi $\|M\| \leq d \cdot \|N\|$. \square

1.4. Misure di Haar. Introduciamo un'importante nozione legata ai gruppi di Lie che ci sarà utile in seguito. Ricordiamo che una σ -algebra \mathcal{F} su un insieme X è una collezione di sottoinsiemi di X (che include X stesso) chiusa rispetto all'unione numerabile e al passaggio al complementare; una *misura* su \mathcal{F} è quindi una funzione $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ che sia additiva su qualsiasi collezione numerabile di sottoinsiemi disgiunti. L'*algebra di Borel* di uno spazio topologico X è la più piccola σ -algebra che contiene gli aperti di X , ed una *misura boreliana* su X è una misura definita sull'algebra di Borel di X .

DEFINIZIONE 1.18. Sia G un gruppo di Lie. Una *misura di Haar invariante a sinistra* su G è una misura boreliana μ su G tale che

- $\mu(A) = \mu(gA)$ per ogni boreliano $A \subset G$ e per ogni $g \in G$,
- $\mu(A) > 0$ per ogni aperto A non vuoto,
- $\mu(A) < +\infty$ per ogni compatto A .

TEOREMA 1.19. *Un gruppo di Lie G ha una misura di Haar invariante a sinistra e questa è unica a meno di riscalamento.*

Analogamente si definisce una misura di Haar invariante a destra ed anche questa è unica a meno di riscalamento. Non è detto però che la misura invariante a destra sia anche invariante a sinistra: se accade questo fenomeno il gruppo di Lie G è detto *unimodulare*.

Sia μ una misura invariante a destra e $g \in G$ un elemento. È facile verificare che anche la misura $\mu^g(A) = \mu(g^{-1}A)$ è invariante a destra; per l'unicità a meno di riscalamento deve esistere un numero reale positivo λ_g tale che $\mu^g = \lambda_g \mu$. La mappa $g \mapsto \lambda_g$ è un omomorfismo continuo da G nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}_{>0}$, detta *funzione modulare*. Il gruppo G è quindi unimodulare se e solo se la funzione modulare è banale.

Ricordiamo che un gruppo G non banale è *semplice* se non ha sottogruppi normali oltre a G e al sottogruppo banale. Nella teoria dei gruppi di Lie si aggiungono generalmente a questa definizione delle condizioni topologiche di connessione e algebriche di non-abelianità:

DEFINIZIONE 1.20. Un gruppo di Lie G è *semplice* se è connesso, non abeliano e non possiede sottogruppi normali connessi oltre a G e al sottogruppo banale.

PROPOSIZIONE 1.21. *Il gruppo di Lie $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ è semplice.*

Mettere dimostrazione.

PROPOSIZIONE 1.22. *I gruppi di Lie compatti, abeliani, discreti o semplici sono unimodulari.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\lambda: G \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ la funzione modulare di G . Se G è compatto l'immagine di G è un sottogruppo compatto di $\mathbb{R}_{>0}$, e quindi è il sottogruppo banale $\{1\}$. Se G è semplice, il sottogruppo normale $\ker \lambda$ è banale o è tutto G . Nel primo caso $G \cong \mathbb{R}_{>0}$, che è escluso perché abeliano, mentre nel secondo caso λ è banale. Se G è abeliano è ovvio che una misura invariante a sinistra lo sia anche a destra. Se G è discreto ogni singoletto ha necessariamente la stessa misura, che è quindi invariante sia a sinistra che a destra. \square

COROLLARIO 1.23. *I gruppi di isometrie $\text{Isom}(S^n)$ e $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ sono unimodulari.*

DIMOSTRAZIONE. Il gruppo $\text{Isom}(S^n)$ è compatto. Il gruppo $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ contiene un sottogruppo semplice di indice due, quindi la funzione unimodulare ha immagine finita, quindi banale. \square

ESEMPIO 1.24. Il gruppo $\text{Aff}(\mathbb{R}) = \{x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$ delle trasformazioni affini di \mathbb{R} non è unimodulare.

OSSERVAZIONE 1.25. Una misura di Haar per $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ può essere costruita nel modo seguente. Sia $x \in \mathbb{H}^n$ un punto fissato qualsiasi. Definiamo la misura di un boreliano $A \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ come la misura dell'insieme $A(x) = \cup_{f \in A} f(x)$. Questa misura è invariante a sinistra, ed è quindi anche invariante a destra perché $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ è unimodulare: in particolare, non dipende dalla scelta del punto x .

1.5. Volume simpliciale e volume iperbolico. Nelle prossime pagine dimostreremo il teorema seguente.

TEOREMA 1.26. *Sia M una varietà iperbolica chiusa. Vale l'uguaglianza*

$$\text{Vol}(M) = v_n \|M\|.$$

Il teorema è utile innanzitutto perché ci fornisce i primi esempi di varietà con volume simpliciale strettamente positivo. Inoltre il teorema implica che il volume di una varietà iperbolica M è un *invariante topologico*, si tratta cioè di un numero che non dipende dalla particolare metrica iperbolica scelta per M . Se M è una superficie questo fatto non sorprende, perché per il Teorema di Gauss-Bonnet il volume di M dipende effettivamente soltanto dalla caratteristica di Eulero $\chi(M)$ di M . Per le varietà iperboliche di dimensione $n \geq 3$, questo risultato è un primo passo verso il più forte Teorema di rigidità di Mostow, che sostiene che M ha al più un'unica metrica iperbolica (che dimostreremo nella prossima sezione).

Per quanto riguarda la dimostrazione, notiamo subito un fatto: entrambe le quantità $\text{Vol}(M)$ e $\|M\|$ vengono moltiplicate per d se sostituiamo M con un suo rivestimento \widetilde{M} di grado d . In particolare, a meno di sostituire M con il suo rivestimento orientante (di grado due), possiamo supporre da subito che M sia orientata.

1.6. Raddrizzamento dei cicli. Per dimostrare il Teorema 1.26 studiamo la classe fondamentale $[M] \in H_n(M, \mathbb{R})$ di una varietà iperbolica chiusa M . La classe $[M]$ è rappresentata da un ciclo

$$\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_h \alpha_h$$

dove α_i è un simpleso singolare $\Delta_n \rightarrow M$. Mostriamo innanzitutto come il ciclo possa essere *raddrizzato*. Il raddrizzamento è una operazione utile definita per ogni k -ciclo in M .

Definiamo innanzitutto il raddrizzamento di un k -simpleso singolare $\beta: \Delta_k \rightarrow \mathbb{H}^n$ nel modo seguente: il raddrizzamento $\beta^r: \Delta_k \rightarrow \mathbb{H}^n$ di β è la mappa che coincide con β sui vertici di Δ_k , e si estende per combinazione convessa a tutto Δ_k . L'immagine di β^r è quindi il simpleso geodetico avente come vertici le immagini lungo β dei vertici di Δ_k .

Consideriamo adesso un simpleso singolare $\beta: \Delta_k \rightarrow M$ a valori in $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$. Poiché Δ_k è semplicemente connesso, la mappa β si solleva ad una mappa $\widetilde{\beta}: \Delta_k \rightarrow \mathbb{H}^n$.

DEFINIZIONE 1.27. Il *raddrizzamento* di β è il simpleso singolare $\beta^r = p \circ (\widetilde{\beta})^r$ ottenuto sollevando, raddrizzando in \mathbb{H}^n , e quindi riproiettando lungo $p: \mathbb{H}^n \rightarrow M$.

La definizione è ben posta: il sollevamento $\widetilde{\beta}$ non è unico, ma due sollevamenti differiscono per una isometria di Γ che commuta con l'operazione di raddrizzamento in \mathbb{H}^n . Il raddrizzamento di β è un nuovo k -simpleso singolare $\beta^r: \Delta_k \rightarrow M$, la cui immagine è immagine di un simpleso geodetico in \mathbb{H}^n .

Indichiamo con $C_k(M, A)$ l' A -modulo delle k -catene in M . Il raddrizzamento si estende per linearità ad un omomorfismo

$$r: C_k(M, A) \rightarrow C_k(M, A)$$

che commuta con l'operatore di bordo ∂ . L'omomorfismo induce quindi un omomorfismo

$$r_*: H_k(M, A) \rightarrow H_k(M, A)$$

in omologia.

PROPOSIZIONE 1.28. *La mappa r_* è l'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo definire una “omotopia” fra un simpleso singolare $\beta = \beta_0$ in M ed il suo raddrizzato $\beta^r = \beta_1$ usando la combinazione convessa: per ogni $t \in [0, 1]$ definiamo il simpleso singolare $\tilde{\beta}^t: \Delta_k \rightarrow \mathbb{H}^n$ come

$$\tilde{\beta}^t(x) = t\tilde{\beta}(x) + (1-t)\tilde{\beta}^r(x)$$

dove $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\beta}^r$ sono due sollevamenti di β e β^r aventi gli stessi vertici. Definiamo quindi in M il simpleso singolare $\beta^t = p \circ \tilde{\beta}^t$. Questa omotopia può essere usata per definire una omotopia di catene fra r_* e l'identità usando la stessa costruzione con cui si dimostra che mappe omotope fra spazi topologici inducono le stesse mappe in omologia. \square

Possiamo dimostrare subito una disuguaglianza fra volume simpliciale e volume iperbolico.

PROPOSIZIONE 1.29. *Sia M una varietà iperbolica orientabile chiusa. Vale la disuguaglianza*

$$\text{Vol}(M) \leq v_n \|M\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_k \alpha_k$ un ciclo che rappresenta la classe fondamentale $[M]$, che possiamo supporre già raddrizzato. Usando la coomologia di De Rham, possiamo integrare la forma volume ω di M sulla classe fondamentale α e ottenere

$$\text{Vol}(M) = \int_M \omega = \int_\alpha \omega = \lambda_1 \int_{\alpha_1} \omega + \dots + \lambda_k \int_{\alpha_k} \omega.$$

L'integrale di ω su α_i è definito come l'integrale su Δ_n del pull-back della forma ω tramite la mappa α_i ed è pari (a meno di segno) al volume del simpleso iperbolico $\tilde{\alpha}_i$ sollevato in \mathbb{H}^n . Poiché questo volume è sempre minore di v_n otteniamo

$$\text{Vol}(M) < (|\lambda_1| + \dots + |\lambda_k|) v_n.$$

Poiché la disuguaglianza vale per tutti i cicli che rappresentano $[M]$ otteniamo $\text{Vol}(M) \leq v_n \|M\|$. \square

1.7. Costruzione di cicli efficienti. La dimostrazione della Proposizione 1.29 mostra il fatto seguente: per ottenere la disuguaglianza opposta $\text{Vol}(M) \geq v_n \|M\|$ dobbiamo costruire dei cicli $\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_k \alpha_k$ “efficienti”, in cui ciascun α_i abbia un volume molto vicino a quello massimale v_n (che però non può essere raggiunto), ed il segno di ciascun coefficiente λ_i sia concorde con il segno di $\int_{\alpha_i} \omega$. Dedichiamo questa sezione alla costruzione di questi cicli efficienti. Innanzitutto individuiamo i semplici con volume vicino a v_n .

PROPOSIZIONE 1.30. *Sia Δ^i una successione di semplici in \mathbb{H}^n i cui vertici tendono ai vertici di un simpleso ideale regolare in $\partial\mathbb{H}^n$. Allora*

$$\text{Vol}(\Delta^i) \rightarrow v_n.$$

Da dimostrare

Sia $t \in (-\infty, 0)$ un numero reale negativo fissato. Un t -simpleso è un simpleso regolare di \mathbb{H}^n del tipo $\Delta(t)$ costruito nella Sezione 1.8 del Capitolo 3, dotato di un ordinamento fissato u_0, \dots, u_n dei vertici. Per la Proposizione 1.30 il volume di un t -simpleso tende a v_n per $t \rightarrow -\infty$.

Un semplice in \mathbb{H}^n con i vertici u_0, \dots, u_n ordinati ha una naturale parametrizzazione $\Delta_k \rightarrow \mathbb{H}^n$ tramite combinazione convessa:

$$\sigma: (t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0 u_0 + \dots + t_n u_n$$

ed è quindi in modo naturale un semplice singolare. Indichiamo con $S(t)$ l'insieme dei t -simplessi in \mathbb{H}^n . Le isometrie di \mathbb{H}^n agiscono su $S(t)$.

PROPOSIZIONE 1.31. *L'azione di $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ su $S(t)$ è libera e transitiva.*

DIMOSTRAZIONE. Un t -simpleso è costruito a partire da un baricentro $x \in \mathbb{H}^n$ e da un semplice regolare $\Delta_x \subset T_x$ centrato nell'origine, i cui vertici sono ordinati. Dati x, x' e $\Delta_x, \Delta_{x'}$ esiste una unica isometria di \mathbb{H}^n che manda x in x' ed i vertici di Δ_x ordinatamente in quelli di $\Delta_{x'}$. \square

COROLLARIO 1.32. *La misura di Haar su $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ definisce una misura su $S(t)$ invariante per l'azione di $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.*

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente fissare un t -simpleso σ_0 e usare la bigezione tra $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ e $S(t)$ data da $\varphi \mapsto \varphi(\sigma_0)$ per trasportare la misura di Haar su $S(t)$. Cambiando il t -simpleso σ_0 la bigezione cambia per moltiplicazione per un elemento di \mathbb{H}^n , quindi la misura indotta non dipende dalla scelta di σ_0 . \square

Come $\text{Isom}(\mathbb{H}^n) = \text{Isom}^+(\mathbb{H}^n) \cup \text{Isom}^-(\mathbb{H}^n)$ è suddivisa fra isometrie che preservano e invertono l'orientazione, l'insieme $S(t) = S^+(t) \cup S^-(t)$ è suddiviso fra t -simplessi *positivi* e *negativi*, a seconda che il corrispondente semplice singolare $\sigma: \Delta_n \rightarrow \mathbb{H}^n$ preservi o inverta l'orientazione (equivalentemente, a seconda che l'ordine dei vertici sia compatibile con l'orientazione di \mathbb{H}^n).

Costruiamo adesso un ciclo efficiente. Sia $x_0 \in M$ un punto qualsiasi. Ricordiamo che x_0 induce una tassellazione di \mathbb{H}^n in domini di Dirichlet $D(x)$ al variare di $x \in p^{-1}(x_0)$. Il ciclo efficiente sarà una combinazione lineare di simplessi con vertici nell'insieme discreto $p^{-1}(x_0)$, proiettati in M lungo p . Fissiamo una preimmagine $x \in p^{-1}(x_0)$.

Poniamo $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ e consideriamo l'insieme

$$\Omega = \Gamma^{n+1}/\Gamma$$

delle $(n+1)$ -uple $(\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ viste a meno dell'azione diagonale di Γ :

$$\gamma \cdot (\gamma_0, \dots, \gamma_n) = (\gamma\gamma_0, \dots, \gamma\gamma_n).$$

Un elemento $\omega = (\gamma_0, \dots, \gamma_n) \in \Omega$ determina un semplice singolare $\tilde{\sigma}_\omega$ in \mathbb{H}^n con vertici $\gamma_0(x), \dots, \gamma_n(x)$ a meno di traslazioni per $\gamma \in \Gamma$. Quindi ω determina univocamente un semplice singolare $\sigma_\omega = p \circ \tilde{\sigma}_\omega$ in M .

Il *ciclo efficiente* $\alpha(t)$ è una combinazione lineare di simplessi di questo tipo:

$$\alpha(t) = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega(t) \cdot \sigma_\omega$$

per degli opportuni coefficienti reali $\lambda_\omega(t)$ dipendenti da t che adesso definiamo. Sia $\omega = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$. Indichiamo con $\lambda_\omega(t)^+$ la "quantità" di t -simplessi positivi i cui vertici ordinati sono contenuti rispettivamente nei domini $\gamma_0(D(x)), \dots, \gamma_n(D(x))$. Per quantità intendiamo (qui e dopo) non la cardinalità, ma la *misura* dell'insieme dei t -simplessi che soddisfano questa proprietà, usando la misura su $S(t)$ definita sopra. Definiamo analogamente $\lambda_\omega(t)^-$ "contando" i t -simplessi negativi e poniamo

$$\lambda_\omega(t) = \lambda_\omega(t)^+ - \lambda_\omega(t)^-.$$

PROPOSIZIONE 1.33. *Il ciclo $\alpha(t)$ ha un numero finito di addendi ed è effettivamente un ciclo. Per $|t|$ sufficientemente grande il ciclo $\alpha(t)$ rappresenta un multiplo positivo di $[M]$ in $H_n(M, \mathbb{R})$.*

DIMOSTRAZIONE. La combinazione lineare che definisce $\alpha(t)$ è la proiezione lungo p di una combinazione lineare di semplici con vertici nell'insieme discreto $p^{-1}(x_0)$. A meno dell'azione diagonale di Γ , possiamo supporre che tutti questi semplici abbiano il loro primo vertice in x .

Sia d il diametro del dominio di Dirichlet $D(x)$ e T il diametro di un t -simpleso. Se $x' \in p^{-1}(x_0)$ ha distanza maggiore di $2d + T$ da x , non esistono t -semplici con vertici in $D(x)$ e $D(x')$. Quindi gli unici addendi con coefficiente non nullo sono quelli in cui tutti i vertici sono ad una distanza minore di $2d + T$ da x . Poiché $p^{-1}(x_0)$ è discreto contiene solo un numero finito di punti a distanza limitata da x e quindi la somma è finita.

Mostriamo adesso che $\alpha(t)$ è un ciclo. Il bordo $\partial\alpha(t)$ è una combinazione lineare di $(n-1)$ -semplici con vertici nell'insieme discreto $p^{-1}(x_0)$. Consideriamo un generico $(n-1)$ -simpleso con vertici in $\gamma_0(x), \dots, \gamma_{n-1}(x)$ e calcoliamo il suo coefficiente in $\partial\alpha(t)$: dobbiamo mostrare che è nullo. Per costruzione il coefficiente è il numero

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_{(\gamma_0, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma, \gamma_j, \dots, \gamma_{n-1})}(t).$$

Mostriamo che ciascun addendo della somma su j è nullo. Per semplificare le notazioni scriviamo solo il caso $j = n$; l'addendo è per definizione pari a:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_{(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma)}(t)^+ - \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_{(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma)}(t)^-.$$

L'espressione di sinistra "conta" il numero N_+ di t -semplici positivi aventi i primi n vertici rispettivamente in $D(\gamma_0(x)), \dots, D(\gamma_n(x))$, e l'ultimo vertice variabile. L'espressione di destra conta il numero N_- di t -semplici negativi aventi sempre i primi n vertici in $D(\gamma_0(x)), \dots, D(\gamma_n(x))$ e l'ultimo variabile.

Consideriamo l'involutione $r: S(t) \rightarrow S(t)$ che specchia un simpleso rispetto alla prima faccia. L'involutione r scambia t -semplici positivi e negativi, e preserva la misura perché è indotta da una riflessione in \mathbb{H}^n . Quindi $N_+ = N_-$ e l'addendo $N_+ - N_-$ è zero: abbiamo dimostrato che $\alpha(t)$ è un ciclo.

Spiegare implicazione.

Mostriamo che per $|t|$ sufficientemente grande il ciclo rappresenta un multiplo positivo di $[M]$. Sia t tale che due vertici in un t -simpleso abbiano distanza maggiore di $2d$. Questa condizione implica il fatto seguente: se esiste un t -simpleso positivo con vertici in $D(\gamma_0(x)), \dots, D(\gamma_n(x))$, allora il simpleso con vertici $\gamma_0(x), \dots, \gamma_n(x)$ è anch'esso positivo. Ne segue quindi che per ogni $\omega \in \Omega$ almeno uno dei due valori $\lambda_\omega(t)^+$ e $\lambda_\omega(t)^-$ è nullo; quindi non ci sono cancellazioni e nell'espressione

$$\alpha(t) = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega(t) \cdot \sigma_\omega$$

esiste almeno un coefficiente $\lambda_\omega(t)$ diverso da zero. Questa semplice condizione è sufficiente per garantire che il ciclo $\alpha(t)$ sia un multiplo positivo di $[M]$: integrando la forma volume η di M su $\alpha(t)$ si ottiene infatti

$$\int_{\alpha(t)} \eta = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega(t) \cdot \int_{\sigma_\omega} \eta.$$

Se $\lambda_\omega(t) > 0$, per quanto appena detto σ_ω è un simpleso positivo e quindi il prodotto $\lambda_\omega(t) \cdot \int_{\sigma_\omega} \eta$ è positivo. Se $\lambda_\omega(t) < 0$ il simpleso σ_ω è negativo ed il prodotto è sempre positivo. Quindi l'integrale di η su $\alpha(t)$ è positivo, e quindi $\alpha(t)$ è un multiplo positivo di $[M]$. \square

Mostriamo che il ciclo $\alpha(t)$ è efficiente.

PROPOSIZIONE 1.34. *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $t_0 < 0$ tale che per ogni $t < t_0$ il ciclo $\alpha(t)$ è combinazione lineare di simplessi singolari σ_ω tutti di volume maggiore di $v_n - \varepsilon$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia d il diametro del dominio di Dirichlet $D(x)$. Chiamiamo *quasi t -simpleso* un simpleso i cui vertici sono a distanza minore di d dai vertici di un t -simpleso. Notiamo che se $\lambda_\omega(t) \neq 0$ allora σ_ω è un quasi t -simpleso per costruzione, e quindi $\alpha(t)$ è combinazione lineare di quasi t -simplessi.

Mostriamo quindi che per ogni ε esiste t_0 tale che per ogni $t < t_0$ ogni quasi t -simpleso ha volume maggiore di $v_n - \varepsilon$. Ragioniamo per assurdo: sia Δ^t una successione di quasi t -simplessi tutti di volume minore di $v_n - \varepsilon$ con $t \rightarrow -\infty$. Ciascun Δ^t ha i vertici d -vicini ad un t -simpleso Δ_*^t . Spostiamo con una isometria ciascuna coppia Δ^t, Δ_*^t in modo che i t -simplessi Δ_*^t abbiano tutti lo stesso baricentro. A questo punto i vertici di Δ^t tendono (come quelli di Δ_*^t) ai vertici di un simpleso ideale regolare, e otteniamo un assurdo per la Proposizione 1.30. \square

1.8. Conclusione della dimostrazione e conseguenze. Possiamo finalmente concludere la dimostrazione che $\text{Vol}(M) = v_n \|M\|$ completando la disuguaglianza mancante.

PROPOSIZIONE 1.35. *Sia M una varietà iperbolica orientabile chiusa. Vale la disuguaglianza*

$$\text{Vol}(M) \geq v_n \|M\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che per $|t|$ sufficientemente grande il ciclo efficiente $\alpha(t)$ rappresenta un elemento positivo in $H_n(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, quindi $[M] = k(t)\alpha(t)$ per qualche $k(t) > 0$. Sia η la forma volume su M e scriviamo

$$\text{Vol}(M) = \int_{[M]} \eta = k(t) \int_{\alpha(t)} \eta = k(t) \sum_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega(t) \cdot \int_{\sigma_\omega} \eta.$$

Notiamo che i segni di $\lambda_\omega(t)$ e $\int_{\sigma_\omega} \eta$ sono sempre concordi. Per la Proposizione 1.34, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t_0 < 0$ tale che per ogni $t < t_0$ vale la disuguaglianza:

$$\text{Vol}(M) \geq k(t) \sum_{\omega \in \Omega} |\lambda_\omega(t)| (v_n - \varepsilon).$$

Quindi

$$\text{Vol}(M) \geq \|M\| (v_n - \varepsilon)$$

per ogni $\varepsilon > 0$, da cui la tesi. \square

Abbiamo finalmente dimostrato che $\text{Vol}(M) = v_n \|M\|$ per ogni varietà iperbolica chiusa M . Possiamo subito ricavare delle conseguenze non banali.

COROLLARIO 1.36. *Siano M, N varietà iperboliche chiuse della stessa dimensione. Se esiste una mappa $f: M \rightarrow N$ di grado d allora $\text{Vol}(M) \geq d \cdot \text{Vol}(N)$.*

COROLLARIO 1.37. *Siano Σ, Σ' superfici chiuse, entrambe con caratteristica di Eulero negativa. Se esiste una mappa $f: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ di grado d allora $\chi(\Sigma) \leq d \cdot \chi(\Sigma')$.*

COROLLARIO 1.38. *Due varietà iperboliche chiuse omotopicamente equivalenti hanno lo stesso volume.*

2. Teorema di rigidità di Mostow

Esponiamo in questa sezione una dimostrazione del teorema seguente:

TEOREMA 2.1 (Rigidità di Mostow). *Siano M e N due varietà iperboliche chiuse connesse orientabili di dimensione $n \geq 3$. Ogni isomorfismo $\pi_1(M) \xrightarrow{\sim} \pi_1(N)$ fra i gruppi fondamentali è indotto da un'unica isometria $M \xrightarrow{\sim} N$.*

Per stimare la potenza di questo risultato ricordiamo le implicazioni seguenti:

$$\text{isometria} \implies \text{diffeomorfismo} \implies \text{omeomorfismo} \implies \begin{array}{c} \text{equivalenza} \\ \text{omotopica} \end{array} \implies \begin{array}{c} \text{isomorfismo} \\ \text{sul } \pi_1 \end{array}$$

Ciascuna di queste implicazioni ha una inversa solo in situazioni molto particolari. Nella discussione che segue forniamo dei controesempi per ciascuna implicazione inversa.

Ovviamente non è vero che due varietà riemanniane diffeomorfe sono isometriche. Se ci restringiamo alle varietà a curvatura costante, questo fatto non è vero per le superfici iperboliche: una superficie di genere $g \geq 2$ ammette una infinità di metriche iperboliche non equivalenti, modellizzate dallo spazio di Teichmüller. Il teorema di rigidità di Mostow vale infatti solo per varietà iperboliche di dimensione $n \geq 3$.

In dimensione 2 e 3 due varietà omeomorfe sono anche diffeomorfe grazie ad un teorema di Moise. Questo fatto non è però vero in dimensione più alta. In particolare la dimensione 4 è quella in cui i concetti di omeomorfismo e diffeomorfismo sono più distanti: esistono molte 4-varietà chiuse che ammettono una infinità di strutture diffeomorfe non equivalenti, ed è (per quanto ne sappiamo adesso) perfino possibile che *qualsiasi* 4-varietà chiusa ammetta infinite strutture diffeomorfe non equivalenti.

Due varietà omotopicamente equivalenti non sono necessariamente omeomorfe: ad esempio, gli spazi lenticolari $L(7, 1)$ e $L(7, 2)$ sono 3-varietà chiuse (entrambe ellittiche) omotopicamente equivalenti ma non omeomorfe.

Un isomorfismo fra gruppi fondamentali non induce una equivalenza omotopica: le 4-varietà S^4 , $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ e $S^2 \times S^2$ sono tutte semplicemente connesse ma non sono omotopicamente equivalenti perché il loro secondo gruppo di omologia è isomorfo rispettivamente a $\{e\}$, \mathbb{Z} e \mathbb{Z}^2 .

2.1. Varietà asferiche. Introduciamo le seguente definizione importante.

DEFINIZIONE 2.2. Una varietà connessa M è *asferica* se il suo rivestimento universale è contrattile.

Ad esempio, le varietà piatte e iperboliche complete hanno rivestimento universale diffeomorfo a \mathbb{R}^n e quindi sono asferiche. Le varietà ellittiche invece hanno rivestimento universale S^n e quindi non sono asferiche. La curvatura gioca un ruolo importante qui: citiamo per completezza un noto risultato.

TEOREMA 2.3 (Cartan-Hadamard). *Una varietà riemanniana completa M con curvatures sezionali ovunque ≤ 0 ha rivestimento universale diffeomorfo a \mathbb{R}^n ed è quindi asferica.*

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in M$ un punto qualsiasi. Poiché M è completa, la mappa esponenziale $\exp_x: T_x \rightarrow M$ è definita su tutto lo spazio tangente T_x . Il fatto che le curvatures sezionali siano tutte negative garantisce che \exp_x sia un diffeomorfismo locale, e quindi un rivestimento. \square

Per le varietà asferiche è possibile invertire l'ultima freccia nelle varie implicazioni mostrate nella sezione precedente. Si tratta in realtà di un fatto topologico molto generale che non vale soltanto per le varietà. Ricordiamo a questo scopo alcune definizioni basilari di topologia algebrica.

Un *complesso di celle finito* di dimensione k (brevemente, un k -complesso) è uno spazio topologico ottenuto iterativamente nel modo seguente:

- un complesso X^0 di dimensione zero è un numero finito di punti,
- un complesso X^k di dimensione k è ottenuto da un complesso X^{k-1} di dimensione $k-1$ attaccando un numero finito di k -celle, cioè di copie del k -disco D^k lungo mappe continue $\varphi: \partial D^k \rightarrow X^{k-1}$.

In un complesso di celle X costruito iterativamente in questo modo l' i -esimo sottinsieme X^i è un sottoinsieme chiuso detto *i -scheletro*. Un complesso di celle finito X è localmente contrattile ed ha quindi un rivestimento universale \tilde{X} : se \tilde{X} è contrattile il complesso X è detto *asferico*.

PROPOSIZIONE 2.4. *Siano X e Y due complessi cellulari finiti connessi con punti base $x_0 \in X^0$ e $y_0 \in Y^0$ e $g: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ un omomorfismo. Se Y è asferico allora esiste una mappa continua $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ che induce g , cioè tale che $f_* = g$. La mappa f è unica a meno di omotopia.*

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo la mappa f iterativamente sull' i -esimo scheletro di X . Sia A un albero massimale contenuto nell'1-scheletro X^1 : l'albero A contiene X^0 ed in particolare il punto base x_0 . Assegniamo un'orientazione arbitraria alle 1-celle $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non contenute in A : ciascuna λ_i definisce un elemento di $\pi_1(X, x_0)$, che indichiamo sempre con il simbolo λ_i . Costruiamo f sull'1-scheletro nel modo seguente: poniamo $f(A) = y_0$, e mandiamo la 1-cella orientata λ_i in un qualsiasi laccio di Y che rappresenta l'elemento $\varphi(\lambda_i)$.

Estendiamo la definizione al 2-scheletro. Una 2-cella è definita da una mappa $\varphi: \partial D^2 \rightarrow X^1$. Dobbiamo mostrare che la mappa composta $f \circ \varphi: \partial D^2 \rightarrow Y$ si estende ad una mappa continua sull'intera cella D^2 : in questo modo estendiamo f su ogni 2-cella, e quindi sull'intero 2-scheletro X^2 . Notiamo che la mappa $f \circ \varphi$ si estende se e solo se è omotopicamente equivalente ad una mappa costante.

Dobbiamo mostrare che $f \circ \varphi$ è omotopicamente equivalente ad una mappa costante. Per fare ciò possiamo modificare φ con una omotopia in X^1 e supporre che attraversi x_0 : in questo modo φ definisce un elemento $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$. Per costruzione di f vale l'uguaglianza

$$[f \circ \varphi] = g([\varphi]) \in \pi_1(Y, y_0).$$

D'altra parte $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ è banale perché φ è la mappa di attaccamento di una 2-cella. Quindi $[f \circ \varphi]$ è banale perché g è un omomorfismo; ne segue che anche $f \circ \varphi$ è omotopicamente banale e siamo a posto.

L'estensione di f al 2-scheletro di X non ha fatto uso del rivestimento universale di Y : ne facciamo uso adesso per estendere f agli scheletri superiori. Procediamo per induzione: supponiamo di aver esteso f all' i -scheletro X^i con $i \geq 2$, ed estendiamo f ad una $(i+1)$ -cella definita da una mappa di incollamento $\varphi: \partial D^{i+1} \rightarrow X^i$. Come sopra, per dimostrare che l'estensione è possibile dobbiamo verificare che la composizione $f \circ \varphi: \partial D^{i+1} \rightarrow Y$ si estenda a D^{i+1} , e questo è equivalente a chiedere che la mappa $f \circ \varphi$ sia omotopa ad una costante.

Poiché $i \geq 2$, il bordo ∂D^{i+1} è semplicemente connesso e quindi la funzione $f \circ \varphi$ si solleva ad una funzione $\widetilde{f \circ \varphi}: \partial D^{i+1} \rightarrow \widetilde{Y}$ a valori nel rivestimento universale \widetilde{Y} . Poiché \widetilde{Y} è contrattile, ogni funzione continua a valori in \widetilde{Y} è omotopa ad una funzione costante. Quindi $\widetilde{f \circ \varphi}$ è omotopa ad una funzione costante, e quindi lo è anche la composizione $f \circ \varphi = p \circ \widetilde{f \circ \varphi}$ lungo il rivestimento $p: \widetilde{Y} \rightarrow Y$.

Abbiamo costruito la mappa $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, mostriamo adesso che tale mappa è unica a meno di omotopia. Come sopra, dimostriamo questo fatto per induzione sull' i -esimo scheletro X^i , iniziando da $i = 1$. Siano $f, f': (X^1, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ due mappe omotope. Poiché l'albero massimale A è contrattile, a meno di cambiare entrambe f e f' con una omotopia possiamo supporre che $f(A) = f'(A) = y_0$. Ora $f \circ \lambda_i$ e $f' \circ \lambda_i$ sono due lacci omotopi (perché f e f' inducono la stessa mappa g sui gruppi fondamentali) per ogni i , e quindi f e f' sono omotope su X^1 .

Dimostriamo il passo induttivo: sappiamo che $f|_{X^{i-1}}$ e $f'|_{X^{i-1}}$ sono omotope e dobbiamo mostrare che lo sono anche $f|_{X^i}$ e $f'|_{X^i}$ per $i \geq 2$. Innanzitutto possiamo supporre che $f|_{X^i}$ e $f'|_{X^i}$ coincidano su X^{i-1} : l'omotopia che trasforma $f'|_{X^{i-1}}$ in $f|_{X^{i-1}}$ può essere facilmente estesa a tutto $f'|_{X^i}$ usando un collare del bordo di D^i su ogni i -cella.

Consideriamo ora una i -cella, attaccata lungo una mappa $\varphi: \partial D^i \rightarrow X^{i-1}$. Sappiamo che $f \circ \varphi = f' \circ \varphi$ e dobbiamo dimostrare che esiste una omotopia fra $f|_{D^i}$ e $f'|_{D^i}$ relativa al bordo ∂D^i . L'omotopia esiste, perché le due mappe possono essere incollate e formare un'unica mappa $F: S^i \rightarrow Y$, e abbiamo già visto (usando \widetilde{Y}) che una mappa di questo tipo con $i \geq 2$ è sempre omotopicamente banale e quindi si estende a $F: D^{i+1} \rightarrow Y$, che a sua volta fornisce una omotopia fra $f|_{D^i}$ e $f'|_{D^i}$. Abbiamo mostrato il passo induttivo e concluso la dimostrazione. \square

COROLLARIO 2.5. *Siano M e N varietà differenziabili chiuse, con N asferica. Ogni omomorfismo $g: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ fra gruppi fondamentali è realizzato da una mappa continua $f: M \rightarrow N$.*

DIMOSTRAZIONE. Per un risultato standard di topologia differenziale (dimostrato generalmente usando la teoria di Morse), una varietà differenziabile chiusa è realizzabile come un complesso finito, quindi si applica il risultato precedente. \square

COROLLARIO 2.6. *Siano M e N varietà differenziabili chiuse asferiche. Ogni isomorfismo $g: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ è indotto da una equivalenza omotopica $f: M \rightarrow N$, unica a meno di omotopia.*

DIMOSTRAZIONE. Gli omomorfismi g e g^{-1} sono indotti da due mappe continue $f: M \rightarrow N$ e $h: N \rightarrow M$, uniche a meno di omotopia. La mappa $h \circ f: M \rightarrow M$ induce l'identità su $\pi_1(M)$ e quindi è omotopa all'identità per la Proposizione 2.4, e lo stesso vale per $f \circ h$: abbiamo quindi un'equivalenza omotopica. \square

COROLLARIO 2.7. *Due varietà chiuse orientabili asferiche di dimensioni diverse non possono avere gruppi fondamentali isomorfi*

DIMOSTRAZIONE. Due varietà asferiche con gruppi fondamentali isomorfi sono omotopicamente equivalenti, quindi hanno omologie isomorfe e quindi la stessa dimensione (pari al massimo n per cui l' n -esimo gruppo di omologia H_n è non banale per le varietà orientabili). \square

Abbiamo fatto il primo passo nella dimostrazione del Teorema di Mostow: sappiamo che ogni isomorfismo fra gruppi fondamentali di varietà iperboliche chiuse è indotto da una equivalenza omotopica. Ci resta il passo più difficile: mostrare che ogni equivalenza omotopica è indotta da un'unica isometria.

2.2. Quasi e pseudo-isometrie. Sia $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento universale di spazi topologici. Ricordiamo che la scelta di un punto base $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ induce un isomorfismo fra il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ ed il gruppo $\text{Aut}(p)$ degli automorfismi del rivestimento, dove $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Ricordiamo il seguente fatto di topologia.

PROPOSIZIONE 2.8. *Sia $f: X \rightarrow Y$ una mappa continua fra spazi topologici connessi per archi, entrambi dotati di rivestimenti universali \tilde{X} e \tilde{Y} . Sia $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ un punto base. Esiste un sollevamento $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ che faccia commutare il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

tale che $\tilde{f} \circ \gamma = f_(\gamma) \circ \tilde{f}$ per qualsiasi elemento $\gamma \in \pi_1(X, x_0) \cong \text{Aut}(p)$.*

Sia $f: M \rightarrow N$ una equivalenza omotopica fra due varietà iperboliche chiuse: nelle prossime sezioni dimostreremo che f è omotopa ad una isometria. Il primo passo consiste nel sostituire f con una funzione liscia: è un fatto generale in topologia differenziale che qualsiasi mappa continua fra due varietà differenziabili sia omotopa ad una funzione liscia.

L'omotopia liscia f si solleva ad una mappa $\tilde{f}: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ fra i rivestimenti universali di M e N , che identifichiamo con \mathbb{H}^n . Se \tilde{f} fosse una isometria potremmo concludere facilmente: purtroppo non è certo questo il caso, ma possiamo comunque dimostrare che \tilde{f} non si discosta molto da una isometria. Fissiamo questo concetto con una definizione.

DEFINIZIONE 2.9. Una mappa $F: X \rightarrow Y$ fra spazi metrici è una *quasi-isometria* se esistono due costanti $C_1 > 0$, $C_2 \geq 0$ tali che

$$\frac{1}{C_1}d(x_1, x_2) - C_2 \leq d(F(x_1), F(x_2)) \leq C_1d(x_1, x_2) + C_2$$

per ogni $x_1, x_2 \in X$ e se $d(F(X), y) \leq C_2$ per ogni $y \in Y$.

Una quasi-isometria è una isometria “a meno di un errore”. Notiamo che F non è necessariamente continua, né iniettiva, né suriettiva! Due spazi metrici X, Y sono *quasi-isometrici* se esiste una quasi-isometria $F: X \rightarrow Y$ (il che implica l'esistenza di una quasi-isometria $G: Y \rightarrow X$), e la quasi-isometria è una relazione di equivalenza fra spazi metrici. Intuitivamente, studiare uno spazio metrico a meno di quasi-isometrie è come guardarlo da lontano, tralasciando ciò che accade

localmente e privilegiandone le caratteristiche globali. Nota che gli spazi metrici compatti sono tutti quasi-isometrici fra loro. Questa relazione di equivalenza fra spazi metrici è un ingrediente importante in *teoria geometrica dei gruppi*: è infatti possibile associare ad un gruppo G finitamente generato una metrica (tramite il suo *grafo di Cayley*), che è determinata univocamente a meno di quasi-isometrie dalla struttura algebrica di G .

Vedremo che la mappa \tilde{f} è una quasi-isometria. In realtà \tilde{f} è anche continua e lipschitziana: useremo quindi nella dimostrazione del teorema di Mostow una nozione di “quasi isometria” meno naturale e più restrittiva di quella data che ci permetterà di semplificare alcuni passaggi (che potrebbero comunque essere dimostrati usando la nozione più naturale, ma con un po’ di fatica in più). Questa è la nozione che useremo.

DEFINIZIONE 2.10. Una mappa $F: X \rightarrow Y$ fra spazi metrici è una *pseudo-isometria* se esistono due costanti positive $C_1, C_2 > 0$ tali che

$$\frac{1}{C_1}d(x_1, x_2) - C_2 \leq d(F(x_1), F(x_2)) \leq C_1d(x_1, x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in X$.

In particolare una pseudo-isometria è C_1 -lipschitziana e quindi continua. Sia $f: M \rightarrow N$ una funzione liscia fra varietà riemanniane della stessa definizione; la *massima dilatazione* di f in un punto $x \in M$ è il massimo rapporto $\frac{\|df_x(v)\|}{\|v\|}$ al variare di v fra i vettori unitari di T_x . La massima dilatazione di f è l'estremo superiore delle massime dilatazioni al variare di $x \in M$: se questa è minore di una costante C , allora la funzione f è C -lipschitziana.

PROPOSIZIONE 2.11. *Sia $f: M \rightarrow N$ una omotopia liscia fra varietà iperboliche chiuse. Il sollevamento $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ è una pseudo-isometria.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché M è compatta, la funzione f ha massima dilatazione C finita. Poiché \tilde{f} è localmente come f , anche \tilde{f} ha massima dilatazione C ed è quindi C -lipschitziana. Lo stesso ragionamento si applica all'inversa omotopica $g: N \rightarrow M$. Quindi esiste $C_1 > 0$ tale che

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2)) &\leq C_1 \cdot d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \tilde{M}, \\ d(\tilde{g}(y_1), \tilde{g}(y_2)) &\leq C_1 \cdot d(y_1, y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in \tilde{N}. \end{aligned}$$

Se \tilde{f} e \tilde{g} fossero l'una l'inversa dell'altra, otterremmo subito la disuguaglianza $d(\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2)) \geq \frac{1}{C_1}d(x_1, x_2)$ e avremmo concluso. Il fatto che queste mappe siano solo inverse omotopiche produce un risultato simile, con un errore additivo C_2 in più. Vediamo i dettagli.

Scriviamo $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$. Per la Proposizione 2.8 abbiamo

$$\tilde{g} \circ \tilde{f} \circ \gamma = (g \circ f)_*(\gamma) \circ \tilde{g} \circ \tilde{f} = \gamma \circ \tilde{g} \circ \tilde{f}$$

per ogni $\gamma \in \Gamma$, in altre parole la mappa $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ commuta con Γ . Sia D un dominio di Dirichlet per Γ : poiché D è compatto, il numero

$$b = \max \{d(\tilde{g}(\tilde{f}(x)), x) \mid x \in D\}$$

è finito. Poiché $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ commuta con Γ e i traslati di D secondo Γ coprono interamente \mathbb{H}^n , otteniamo $d(\tilde{g}(\tilde{f}(x)), x) \leq b$ per ogni $x \in \mathbb{H}^n$. Quindi

$$d(x_1, x_2) - 2b \leq d(\tilde{g}(\tilde{f}(x_1)), \tilde{g}(\tilde{f}(x_2))) \leq C_1 \cdot d(\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2))$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{H}^n$. Quindi \tilde{f} è una pseudo-isometria con $C_2 = 2b/C_1$. \square

2.3. Estensione al bordo di una pseudo-isometria. Dedichiamo questa sezione alla dimostrazione del fatto seguente.

TEOREMA 2.12. *Una pseudo-isometria $F: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ si estende ad una funzione continua $F: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ la cui restrizione al bordo è una funzione iniettiva $\partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$.*

Divideremo la dimostrazione in alcuni lemmi.

LEMMA 2.13. *Sia $r \subset \mathbb{H}^n$ una retta e $\pi: \mathbb{H}^n \rightarrow r$ la proiezione ortogonale su r . Sia $x \in \mathbb{H}^n$ un punto a distanza $s > 0$ da r e d la massima dilatazione di π in x . Vale*

$$d = \frac{1}{\cosh s}.$$

DIMOSTRAZIONE. Rappresentiamo \mathbb{H}^n con il modello del semispazio, con r e x come in Fig. 3-(sinistra): la retta r è l'asse positivo e x è un punto qualsiasi. Sia s la distanza tra x e $\pi(x)$. Mostriamo che

$$\cosh s = \frac{1}{\cos \theta}.$$

Per dimostrare questa uguaglianza consideriamo \mathbb{H}^2 come semispazio dentro \mathbb{C} e con $\pi(x) = i$. Consideriamo la geodetica γ di velocità unitaria mostrata in figura, parametrizzata in modo che $\gamma(0) = \pi(x)$ e $\gamma(s) = x$. Troviamo una parametrizzazione esplicita per γ .

Sappiamo che una geodetica verticale η è parametrizzata come $\eta(t) = ie^t$. La trasformazione di Möbius

$$z \mapsto \frac{z+1}{-z+1}$$

manda $0, \infty$ in $1, -1$ e quindi trasforma η in γ . Otteniamo

$$\gamma(t) = \frac{ie^t + 1}{-ie^t + 1}.$$

Quindi

$$x = \frac{ie^s + 1}{-ie^s + 1}$$

da cui otteniamo

$$\cos \theta = \Im x = \Im \frac{(ie^s + 1)^2}{e^{2s} + 1} = 2 \frac{2e^s}{e^{2s} + 1} = \frac{2}{e^s + e^{-s}} = \frac{1}{\cosh s}.$$

A questo punto consideriamo il differenziale $d\pi_x: T_x \rightarrow T_{\pi(x)}$ ed identifichiamo entrambi gli spazi tangenti con \mathbb{R}^n . Consideriamo la decomposizione ortogonale $T_x = U \oplus V$ suggerita in Fig. 3-(destra), dove U è la retta vettoriale generata da x e $V = U^\perp$. Vediamo che $V = \ker d\pi_x$ mentre il generatore u di U viene ruotato di un angolo $-\theta$ da $d\pi_x$. Rispetto alla metrica euclidea $\|d\pi_x(u)\| = \|u\|$, ma rispetto alla metrica iperbolica abbiamo

$$\frac{\|d\pi_x(u)\|}{\|u\|} = \frac{x_n}{\pi(x)_n} = \cos \theta = \frac{1}{\cosh s}$$

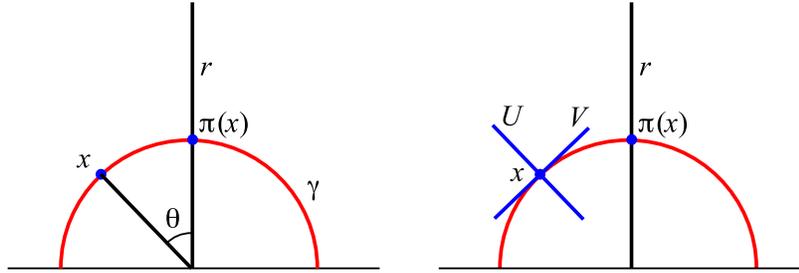


FIGURA 3. Il coseno iperbolico della distanza fra x e $\pi(x)$ è l'inverso del coseno di θ (sinistra). Prendiamo la decomposizione ortogonale del tangente T_x suggerita in figura (destra).

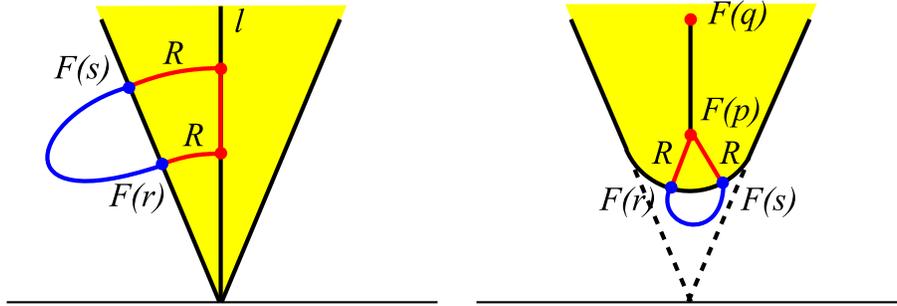


FIGURA 4. L'immagine di un segmento attraverso una pseudo-isometria F non può discostarsi troppo da un segmento.

dove y_n indica l'ultima coordinata del vettore y , da cui la tesi. □

Indichiamo con \overline{pq} il segmento che unisce due punti $p, q \in \mathbb{H}^n$, e con $N_r(A)$ il luogo dei punti distanti al più r dal sottoinsieme $A \subset \mathbb{H}^n$.

LEMMA 2.14. *Sia $F: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ una pseudo-isometria. Esiste $R > 0$ tale che*

$$F(\overline{pq}) \subset N_R(\overline{F(p)F(q)})$$

per ogni $p, q \in \mathbb{H}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un raggio R sufficientemente grande in modo da avere $\cosh R > C_1^2$. Sia l una retta che contiene i punti $F(p)$ e $F(q)$. Mostriamo che la curva $F(\overline{pq})$ può uscire da $N_R(l)$, ma può farlo solo per un tempo limitato. Sia $\overline{r\bar{s}} \subset \overline{pq}$ un sottosegmento massimale tale che la curva $F(\overline{r\bar{s}})$ sia interamente disgiunta dalla parte interna di $N_R(l)$, come la curva blu in Fig. 4-(sinistra).

Mostriamo che la lunghezza $d(r, s)$ del segmento $\overline{r\bar{s}}$ è limitata da una costante che dipende solo da C_1 e C_2 . Il fatto che F sia una pseudo-isometria implica che

$$(1) \quad \frac{1}{C_1}d(r, s) - C_2 \leq d(F(r), F(s)).$$

Adesso stimiamo $d(F(r), F(s))$ usando la curva rossa mostrata in Fig. 4-(sinistra). Poiché F è C_1 -Lipschitz, la curva blu è lunga al più $C_1 d(r, s)$. La proiezione della

curva blu sulla retta l ha dilatazione al più $1/\cosh R$ per il Lemma precedente, quindi la porzione di curva rossa dentro l è lunga al più $C_1 d(r, s)/\cosh R$. Quindi

$$(2) \quad d(F(r), F(s)) \leq C_1 \frac{d(r, s)}{\cosh R} + 2R.$$

Combinando (1) e (2) troviamo

$$\frac{1}{C_1} d(r, s) - C_2 \leq C_1 \frac{d(r, s)}{\cosh R} + 2R$$

Poiché $\cosh R > C_1^2$ otteniamo $d(r, s) < M$ per una costante M che dipende solo da C_1 e C_2 . Abbiamo dimostrato che la curva $F(\overline{pq})$ esce da $N_R(l)$ solo in sottosegmenti di lunghezza $< M$. Poiché F è C_1 -Lipchitziana la curva $F(\overline{pq})$ non può allontanarsi da $N_r(l)$ più di una distanza $C_1 M/2$. Quindi a meno di sostituire R con $R + C_1 M/2$ la curva $F(\overline{pq})$ giace tutta in $N_R(l)$.

Ci resta da mostrare che $F(\overline{pq})$ non esce dal sottoinsieme limitato $N_R(\overline{F(p)F(q)})$: la dimostrazione è analoga (ma più semplice) a quella già vista. Scegliamo un segmento massimale \overline{rs} su cui la curva è fuori da $N_R(\overline{F(p)F(q)})$ come in Fig. 4. Usando il percorso rosso otteniamo

$$d(F(r), F(s)) \leq 2R$$

che combinato con la disuguaglianza (1) implica

$$\frac{1}{C_1} d(r, s) - C_2 \leq 2R.$$

Come prima, ne deduciamo che la curva $F(\overline{rs})$ si allontana di una distanza finita da $N_R(\overline{F(p)F(q)})$ e quindi (a meno di cambiare R con un raggio più grande) abbiamo concluso. \square

In tutti questi lemmi la costante R dipende soltanto da C_1 e C_2 .

LEMMA 2.15. *Sia $F: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ una pseudo-isometria. Esiste $R > 0$ tale che per ogni $p \in \mathbb{H}^n$ e ogni semiretta l uscente da p esiste un'unica semiretta l' uscente da $F(p)$ tale che*

$$F(l) \subset N_R(l').$$

DIMOSTRAZIONE. Parametrizziamo la semiretta l come geodetica $l: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ con $f(0) = p$ e velocità unitaria. Il fatto che F sia una pseudo-isometria implica subito che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(F(p), F(l(t))) \rightarrow \infty.$$

Per i sufficientemente grande consideriamo il segmento con estremi $F(p)$ e $F(l(i))$. Sia $v_i \in T_{F(p)}$ il vettore unitario tangente che punta verso $F(l(i))$. Mostriamo che la successione $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy: sia α_{ij} l'angolo formato dai vettori v_i e v_j , e sia $R > 0$ la costante fornita dal lemma precedente. Dato $\varepsilon > 0$, sia $M > 0$ tale $d(F(p), F(l(i))) > R\varepsilon^{-1}$ per ogni $i > M$; mostriamo che $\alpha_{ij} < \varepsilon$ per ogni $i > j > M$.

Per il Lemma precedente il punto $F(l(j))$ è contenuto in un R -intorno del segmento $\overline{F(p)F(l(i))}$ come mostrato in Fig. 5. Il segmento rosso mostrato in figura è quindi più piccolo di R . D'altra parte il segmento $\overline{F(p)F(l(j))}$ è più lungo di $R\varepsilon^{-1}$: quindi $\alpha_{ij} < \varepsilon$.

La successione di Cauchy v_i nella sfera unitaria di $T_{F(p)}$ converge ad un vettore unitario v' . Definiamo quindi l' come la semiretta uscente da $F(p)$ con tangente v' .

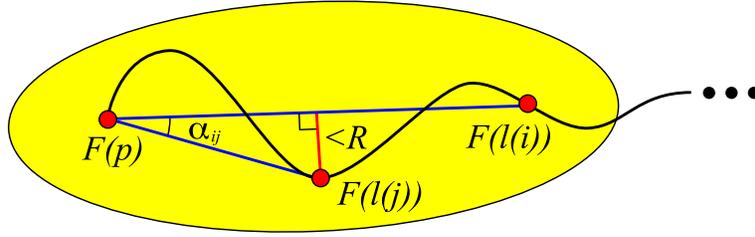


FIGURA 5. Tutto l'arco da $F(p)$ in $F(l(i))$ è contenuto in un R -intorno (disegnato in giallo) del segmento con estremi $F(p)$ e $F(l(i))$.

È facile concludere che $F(l) \subset N_R(l')$ e che l' è l'unica semiretta uscente da $F(p)$ con questa proprietà. \square

Il lemma precedente associa ad ogni semiretta l di \mathbb{H}^n un'altra semiretta l' . Possiamo quindi estendere la pseudo-isometria $F: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ al bordo $\partial\mathbb{H}^n$ nel modo seguente: se l punta verso un punto $x \in \partial\mathbb{H}^n$, definiamo $F(x)$ come il punto $\partial\mathbb{H}^n$ puntato da l' .

LEMMA 2.16. *L'estensione al bordo $F: \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ è ben definita e iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Siano l_1, l_2 due semirette distinte che puntano verso lo stesso punto $x \in \mathbb{H}^n$: dobbiamo mostrare che l'_1, l'_2 puntano verso lo stesso punto $F(x)$. Parametizziamo tutte le semirette come geodetiche $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ con velocità unitaria. Esiste un $M > 0$ tale che $d(l_1(t), l_2(t)) < M$ per ogni t . Se per assurdo l'_1 e l'_2 puntassero verso punti diversi, otterremmo $d(l_1(t'), l_2(t')) \rightarrow \infty$ e quindi anche $d(F(l_1(t)), F(l_2(t))) \rightarrow +\infty$, contraddicendo il fatto che F è una quasi-isometria.

Mostriamo analogamente che F è iniettiva. Se l_1 e l_2 sono semirette che puntano verso punti distinti, allora $d(l_1(t), l_2(t)) \rightarrow \infty$ e quindi $d(l'_1(t), l'_2(t)) \rightarrow \infty$ perché F è una pseudo-isometria. Quindi l'_1 e l'_2 puntano verso punti distinti. \square

I prossimi lemmi servono per dimostrare che l'estensione $F: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ è continua. Innanzitutto estendiamo alle rette ciò che abbiamo già dimostrato per le semirette.

LEMMA 2.17. *Sia $F: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ una pseudo-isometria. Esiste $R > 0$ tale che per ogni retta l esiste un'unica retta l' tale che $F(l) \subset N_R(l')$.*

DIMOSTRAZIONE. Parametizziamo l come $(-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$. Sappiamo già (spezzando l in due semirette) che $F(l(t))$ è una curva continua che tende a due punti distinti $x_{\pm} \in \partial\mathbb{H}^n$ per $t \rightarrow \pm\infty$. Sappiamo anche che per ogni $t > 0$ vale

$$F(l([-t, t])) \subset N_R(\overline{F(l(-t))F(l(t))})$$

e mandando $t \rightarrow +\infty$ ne deduciamo che $F(l) \subset N_R(l')$ dove l' è la retta con estremi x_- e x_+ . \square

Il prossimo lemma asserisce che una pseudo-isometria non distorce troppo le relazioni fra rette e iperpiani ortogonali.

LEMMA 2.18. *Sia $F: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ una pseudo-isometria. Esiste $R > 0$ tale che per ogni retta l e ogni iperpiano H ortogonale a l , la proiezione di $F(H)$ ortogonale su l' ha come immagine un segmento di lunghezza minore di R .*

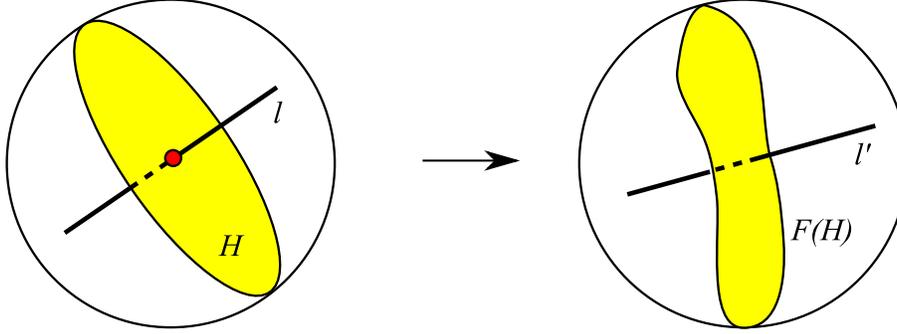


FIGURA 6. Siano l una retta e H un iperpiano ortogonali: la proiezione ortogonale di H su l ha come immagine ovviamente solo il punto $l \cap H$. Una pseudo-isometria distorce questa configurazione di poco: la proiezione dell'immagine $F(H)$ proiettata sulla retta l' è un segmento limitato.

DIMOSTRAZIONE. La configurazione è descritta in Fig. 6. Assicurandosi sempre che la costante R che si ottiene dipenda solo da C_1 e C_2 , è sufficiente considerare al posto di H una retta generica $s \subset H$ passante per il punto $p = l \cap H$. Per i lemmi precedenti l'immagine $F(s)$ è a distanza R -limitata dalla retta s' : è quindi sufficiente dimostrare che la proiezione di s' su l' abbia immagine limitata (da una costante che dipende solo da C_1 e C_2). Questa immagine è in generale un segmento, i cui estremi sono le immagini dei punti all'infinito di s' . È quindi sufficiente considerare l'immagine di un punto all'infinito di s' .

Consideriamo quindi la Fig. 7, ed in particolare la proiezione f di $F(s^\infty)$ su l' . In figura sono mostrate le rette s_1 e s_2 , che hanno distanze $d = d_1 = d_2$ fissate ($\cosh d_i = \sqrt{2}$) da p . L'immagine $F(p)$ è $C_1 d$ -vicina alle curve $F(s_i)$ che sono a loro volta R -vicine alle rette s'_i , quindi $F(p)$ è $(C_1 d + R)$ -vicina alle rette s'_i . Il punto $F(p)$ è R -vicino a l' ; quindi se indichiamo con q la proiezione di $F(p)$ su l' otteniamo che q è $(C_1 d + 2R)$ -vicino ad entrambe s'_1 e s'_2 . Questo fatto implica facilmente che f è $(C_1 d + 2R)$ -vicino al punto q , che non dipende da nessuna scelta: abbiamo concluso. \square

LEMMA 2.19. *L'estensione $F: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo $x \in \partial \mathbb{H}^n$ e la sua immagine $F(x) \in \partial \mathbb{H}^n$. Sia l una semiretta che punta su x : quindi l' punta su $F(x)$. Un sistema di intorni per $F(x)$ è dato da tutti i semispazi ortogonali a l' contenenti $F(x)$: fissiamo un tale semispazio S .

Sia $R > 0$ la costante fornita dal lemma precedente. Esiste un punto $p \in l$ per cui l'intera semiretta \overline{px} è mandata tramite F dentro S a distanza almeno R da ∂S . Per il lemma precedente, l'immagine di ogni iperpiano H ortogonale ad un punto di \overline{px} è quindi contenuta in S : quindi l'intero semispazio determinato da \overline{px} è spedito dentro S da F . Quindi F è continua in ogni punto del bordo x (e sappiamo già che lo è all'interno). \square

Abbiamo finalmente dimostrato che ogni pseudo-isometria F si estende con continuità al bordo, e che la sua estensione al bordo è iniettiva.

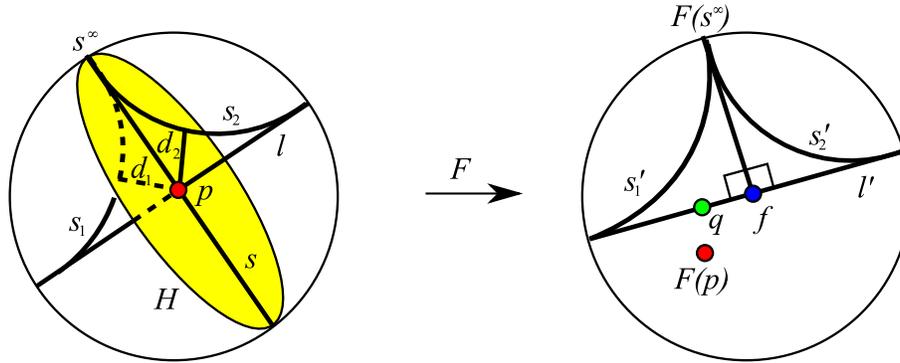


FIGURA 7. Le rette l' , s'_1 e s'_2 approssimano a meno di un errore additivo R le immagini di l , s_1 e s_2 . La proiezione q di $F(p)$ su l' è quindi vicina a $F(p)$, che è a sua volta vicino alle rette s'_i . Quindi la proiezione f di $F(s^\infty)$ su l' è vicina a q .

2.4. Conclusione della dimostrazione del Teorema di Mostow. Nelle sezioni precedenti abbiamo raccolto quasi tutte le informazioni necessarie per concludere finalmente la dimostrazione del Teorema di rigidità di Mostow. Mancano ancora alcuni fatti, tra cui il seguente.

LEMMA 2.20. *Sia $f: M \rightarrow N$ una equivalenza omotopica liscia fra varietà iperboliche chiuse orientabili e $\tilde{f}: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ un suo sollevamento. L'estensione di \tilde{f} su $\partial\mathbb{H}^n$ manda i vertici di un simpleso ideale regolare nei vertici di un simpleso ideale regolare.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo innanzitutto che \tilde{f} è una pseudo-isometria e si estende quindi ad una funzione continua su tutto $\overline{\mathbb{H}^n}$ che manda il bordo in sé. Supponiamo per assurdo che esistano dei vertici w_0, \dots, w_n di un simpleso ideale regolare (avente quindi volume massimo v_n) le cui immagini $\tilde{f}(w_0), \dots, \tilde{f}(w_n)$ determinano un simpleso ideale non regolare, avente quindi volume più piccolo di $v_n - 2\varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$. Per continuità esiste per ogni i un intorno U_i di w_i in $\overline{\mathbb{H}^n}$ tale che il volume del simpleso con vertici $\tilde{f}(u_0), \dots, \tilde{f}(u_n)$ è minore di $v_n - \varepsilon$ per qualsiasi scelta dei vertici $u_i \in U_i$.

Motivare continuità.

Nella Sezione 1.7 abbiamo definito per ogni $t < 0$ un ciclo efficiente

$$\alpha(t) = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega(t) \cdot \sigma_\omega.$$

Ricordiamo come è definito $\alpha(t)$. Abbiamo $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ e prendiamo un punto $x_0 \in M$, che induce un insieme discreto $p^{-1}(x_0)$ di punti ed una tassellazione di \mathbb{H}^n in domini di Dirichlet $D(x)$ al variare di $x \in p^{-1}(x_0)$. Fissiamo anche una preimmagine $x \in p^{-1}(x_0)$. Definiamo quindi $\Omega = \Gamma^{n+1}/\Gamma = \{(\gamma_0, \dots, \gamma_n)\}$ e σ_ω è il simpleso singolare con vertici $\gamma_0(x), \dots, \gamma_n(x)$ proiettato in M . Il coefficiente $\lambda_\omega(t)$ è la “quantità” (con segno) di t -simplessi aventi vertici rispettivamente nei domini di Dirichlet $\gamma_0(D(x)), \dots, \gamma_n(D(x))$.

Abbiamo visto nella Proposizione 1.34 che la successione di cicli $\alpha(t)$ è efficiente: sappiamo quindi che esiste un $t_0 < 0$ tale che per ogni $t < t_0$ ciascun simpleso singolare σ_ω ha volume maggiore di $v_n - \varepsilon$. Diciamo che σ_ω è *cattivo* se il suo

i -esimo vertice è contenuto in U_i , per ogni i . Mostriamo adesso che $\alpha(t)$ deve contenere una “percentuale” minima di semplici cattivi.

Innanzitutto mostriamo che la norma

$$\|\alpha(t)\| = \sum_{\omega \in \Omega} |\lambda_\omega(t)|$$

di $\alpha(t)$ è per $|t|$ sufficientemente grande un numero reale che non dipende da t . Sappiamo dalla dimostrazione della Proposizione 1.33 che per $|t|$ abbastanza grande λ_ω è uguale a λ_ω^+ oppure $-\lambda_\omega^-$ per ogni $\omega \in \Omega$. Rappresentiamo ogni $\gamma \in \Omega$ come $(\text{id}, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e quindi ogni semplice singolare σ_ω come il semplice di vertici $x, \gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)$ composto con la proiezione $p: \mathbb{H}^n \rightarrow M$. Il numero $\|\alpha(t)\|$ è quindi semplicemente la “quantità” di t -semplici in \mathbb{H}^n aventi il primo vertice nel dominio $D(x)$ e gli altri vertici ovunque. Questi semplici sono in naturale corrispondenza biunivoca con le isometrie che mandano x in un punto qualsiasi di $D(x)$, la cui misura non dipende da t (ed è pari proprio a $\text{Vol}(D(x)) = \text{Vol}(M)$ per l'Osservazione 1.25).

Stimiamo adesso il contributo dei semplici cattivi, cioè il numero reale

$$\|\beta(t)\| = \sum |\lambda_\omega(t)|$$

dove la somma è presa solo sui semplici singolari cattivi ω . Scegliamo $x \in p^{-1}(x_0)$ tale che $D(x)$ sia interamente contenuto nell'aperto U_0 . Ragionando come sopra, vediamo che $\|\beta(t)\|$ è la “quantità” di t -semplici con vertici $w_0 \in D(x)$ e $w_i \in U_i$ per ogni $i > 0$. È facile vedere che per t abbastanza grande questa quantità è maggiore di una costante che non dipende da t .

Abbiamo quindi mostrato che la “percentuale” $\|\beta(t)\|/\|\alpha(t)\|$ di semplici cattivi è maggiore di una costante C che non dipende da t . Da questo giungiamo facilmente ad un assurdo. Dato un semplice singolare raddrizzato σ in M , definiamo $f_*(\sigma)$ come il semplice ottenuto raddrizzando $f \circ \sigma$. Ricordiamo che $[M] = k(t)\alpha(t)$ per un numero reale $\alpha(t) > 0$ dipendente da t . La mappa $f_*: H_n(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_n(N, \mathbb{R})$ ha grado uno e manda il ciclo $k(t) \cdot \alpha(t)$ nel ciclo

$$k(t) \cdot f_*(\alpha(t)) = k(t) \sum_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega(t) \cdot f_*(\sigma_\omega)$$

che rappresenta $[N]$. Poiché f è una equivalenza omotopica vale $\text{Vol}(M) = \text{Vol}(N)$ per il Corollario 1.38. Quindi se η_M e η_N sono le forme volume di M e N otteniamo $f^*\eta_N = \eta_M$ e quindi

$$\text{Vol}(M) = \int_{k(t) \cdot \alpha(t)} \eta_M = \int_{k(t) \cdot f_*(\alpha(t))} \eta_N = \text{Vol}(N).$$

Sappiamo però che una percentuale $> C > 0$ di semplici σ_ω è cattiva, e l'immagine $f_*(\sigma_\omega)$ di un semplice cattivo ha volume $< v_n - \varepsilon$. Quindi

$$\int_{k(t) \cdot f_*(\alpha(t))} < \|N\|((1 - C)v_n + C(v_n - \varepsilon)) = \text{Vol}(N) - C\|N\|\varepsilon$$

e quindi giungiamo finalmente ad un assurdo. \square

Nei risultati seguenti usiamo per la prima volta l'ipotesi $n \geq 3$.

PROPOSIZIONE 2.21. *Sia $\Delta \subset \mathbb{H}^n$ un semplice ideale regolare e F una sua $(n - 1)$ -faccia. Se $n \geq 3$ gli unici semplici ideali regolari in \mathbb{H}^n aventi F come faccia sono Δ e $r(\Delta)$, dove r è la riflessione lungo l'iperpiano contenente F .*

DIMOSTRAZIONE. Sia Δ' un semplice ideale regolare con faccia F . La faccia F è un semplice ideale di dimensione $n-1 \geq 2$ e quindi ha un ben definito “centro” O ottenuto (ad esempio) intersecando gli “assi” di F , ottenuti prendendo per ogni vertice v l’unica retta passante per v ortogonale alla faccia opposta. Il vertice di Δ' opposto a F deve giacere sulla retta ortogonale ad F nel punto O , quindi ci sono solo due possibilità $\Delta' = \Delta$ oppure $\Delta' = r(\Delta)$. \square

Dato un n -simpleso non degenero $\Delta \subset \mathbb{H}^n$ definiamo l’insieme $R(\Delta)$ di n -simplessi come l’insieme di tutti i simplessi ottenuti iterativamente da Δ specchiando lungo le facce.¹ Se Δ è un semplice regolare di dimensione 2 l’insieme $R(\Delta)$ è la tassellazione di Farey già considerata nella Fig. 5 del Capitolo 3. Anche se Δ è un semplice regolare di dimensione 3 otteniamo una tassellazione di \mathbb{H}^3 . Se però Δ è un semplice regolare di dimensione ≥ 4 non otteniamo più una tassellazione perché i simplessi di $R(\Delta)$ si sovrappongono. In ogni caso otteniamo facilmente il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 2.22. *Sia Δ un semplice ideale regolare in \mathbb{H}^n . L’unione dei vertici di tutti i simplessi in $R(\Delta)$ è un sottoinsieme denso di $\partial\mathbb{H}^n$.*

Da dimostrare

Possiamo finalmente dimostrare il cuore del Teorema di Mostow.

COROLLARIO 2.23. *Sia $f: M \rightarrow N$ una equivalenza omotopica liscia fra varietà iperboliche chiuse orientabili di dimensione $n \geq 3$. L’estensione $\tilde{f}|_{\partial\mathbb{H}^n}: \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ è la traccia di una isometria $\psi: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano v_0, \dots, v_n vertici di un semplice ideale regolare Δ : sappiamo che anche $\tilde{f}(v_0), \dots, \tilde{f}(v_n)$ sono vertici di un semplice ideale regolare. Sia ψ l’unica isometria di \mathbb{H}^n tale che $\psi(v_i) = \tilde{f}(v_i)$ per ogni i .

Sia ψ che \tilde{f} sono iniettive e mandano i vertici di un semplice ideale regolare nei vertici di un semplice ideale regolare. Sia r la riflessione lungo la faccia opposta al vertice v_0 : dalla Proposizione 2.21 segue che i punti $\psi(p(v_0))$ e $\tilde{f}(p(v_0))$ sono entrambi forzati ad essere l’unico vertice diverso da $\psi(v_0) = \tilde{f}(v_0)$ che determina un semplice ideale regolare con gli altri vertici $\tilde{f}(v_1), \dots, \tilde{f}(v_n)$. Quindi ψ e \tilde{f} coincidono su $p(v_0)$.

Iterando questo argomento troviamo che ψ e \tilde{f} coincidono su tutti i vertici di tutti i simplessi in $R(\Delta)$. Poiché questi vertici formano un denso, le due funzioni coincidono su tutto $\partial\mathbb{H}^n$. \square

Possiamo finalmente dimostrare il Teorema di rigidità di Mostow.

TEOREMA 2.24. *Sia $f: M \rightarrow N$ una equivalenza omotopica fra varietà iperboliche orientabili chiuse. La mappa f è omotopicamente equivalente ad una isometria.*

DIMOSTRAZIONE. A meno di omotopia supponiamo che f sia liscia. Poniamo $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ e $N = \mathbb{H}^n/\Lambda$. La scelta di un punto base fornisce una identificazione dei gruppi Γ e Λ con i gruppi fondamentali di M e N e quindi un isomorfismo $f_*: \Gamma \rightarrow \Lambda$. Scegliamo il sollevamento $\tilde{f}: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ in modo che $\tilde{f} \circ \gamma = f_*(\gamma) \circ \tilde{f}$ per ogni $\gamma \in \Gamma$.

¹Formalmente, poniamo $R_0 = \{\Delta\}$ e definiamo R_{i+1} come l’insieme di tutti i simplessi ottenuti specchiando i simplessi in R_i lungo gli iperpiani che contengono le loro $(n-1)$ -facce. Definiamo infine $R(\Delta) = \cup_{i=0}^{\infty} R_i$.

Sappiamo che esiste una isometria $\psi: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ che coincide con \tilde{f} sul bordo. Quindi sul bordo vale l'uguaglianza $\psi \circ \gamma = f_*(\gamma) \circ \psi$ per ogni $\gamma \in \Gamma$. Due isometrie che coincidono al bordo sono identiche su tutto \mathbb{H}^n : quindi la stessa uguaglianza vale su tutto \mathbb{H}^n per ogni $\gamma \in \Gamma$. Quindi l'isometria ψ scende ad una isometria

$$\psi: M \rightarrow N.$$

Una omotopia fra \tilde{f} e ψ si costruisce semplicemente proiettando su M la combinazione convessa di \tilde{f} e ψ in \mathbb{H}^n . □

2.5. Conseguenze del teorema. La conseguenza più importante del teorema di rigidità di Mostow è il fatto che l'intera geometria di una varietà iperbolica M di dimensione $n \geq 3$ è un invariante topologico. In questo modo si estende (in modo più forte) ad alcune varietà di dimensione $n \geq 3$ la nozione di *geometrizzazione* che per le superfici è fornita dal teorema di uniformizzazione di Riemann.

Oltre a questo fatto fondamentale il teorema di Mostow ha altre conseguenze importanti. Dati due gruppi $H < G$ ricordiamo la differenza fra *normalizzatore* e *normalizzato* di H in G : il normalizzatore è il più grande sottogruppo $N < G$ contenente H tale che $H \triangleleft N$, mentre il normalizzato è il più piccolo sottogruppo $K < G$ contenente H tale che $K \triangleleft G$. Indichiamo con $N(H)$ il normalizzatore di H in G . Il risultato seguente è un fatto molto generale che non dipende dal teorema di Mostow.

PROPOSIZIONE 2.25. *Sia $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ una varietà iperbolica completa. Esiste un isomorfismo naturale*

$$\text{Isom}(M) \cong N(\Gamma)/\Gamma.$$

DIMOSTRAZIONE. Ogni isometria $\varphi: M \rightarrow M$ si solleva ad una mappa $\tilde{\varphi}$ che faccia commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{H}^n \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

tale che per ogni $\gamma \in \Gamma$ le isometrie $\tilde{\varphi} \circ \gamma$ e $\tilde{\varphi}$ differiscano per un automorfismo del rivestimento, cioè per un elemento $\gamma' \in \Gamma$. In altre parole $\tilde{\varphi} \circ \gamma \circ \tilde{\varphi}^{-1} \in \Gamma$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, cioè $\tilde{\varphi} \in N(\Gamma)$. Il sollevamento $\tilde{\varphi}$ è unico a meno di moltiplicazione (a sinistra o a destra) per elementi di Γ . Il sollevamento da φ a $\tilde{\varphi}$ definisce quindi un omomorfismo

$$\text{Isom}(M) \rightarrow N(\Gamma)/\Gamma.$$

È immediato verificare la suriettività (un elemento di $N(\Gamma)$ determina una isometria) e l'iniettività (se $\tilde{\varphi}$ è un elemento di Γ allora φ è l'identità). □

Dato un gruppo G indichiamo con $\text{Aut}(G)$ il gruppo dei suoi automorfismi e con $\text{Int}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$ il sottogruppo normale formato dagli automorfismi interni. Definiamo quindi il quoziente

$$\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Int}(G)$$

degli automorfismi *esterni*. Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Sappiamo bene che $\pi_1(X)$ dipende dalla scelta di un punto base, e che punti base diversi

danno gruppi isomorfi ma in modo non canonico: l'isomorfismo fra $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ dipende dalla scelta di un arco che collega x_0 e x_1 e quindi è determinato solo a meno di un automorfismo interno. Nel gruppo $\text{Out}(\pi_1(X))$ gli automorfismi interni però non hanno più nessun effetto e quindi esiste un isomorfismo canonico tra $\text{Out}(\pi_1(X, x_0))$ e $\text{Out}(\pi_1(X, x_1))$.

Sia $\text{Omeo}(X)$ il gruppo degli omeomorfismi di X in sé. Un omeomorfismo sposta il punto base e quindi non è ben definita una mappa da $\text{Omeo}(X)$ in $\pi_1(X)$. Per quanto abbiamo appena detto è però ben definito un omomorfismo di gruppi

$$\text{Omeo}(X) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(X)).$$

In generale questo omomorfismo non è né iniettivo né suriettivo. È facile vedere che due omeomorfismi omotopi inducono lo stesso automorfismo esterno. Useremo il seguente facile esercizio.

ESERCIZIO 2.26. Sia $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ una varietà iperbolica chiusa. L'unica isometria di \mathbb{H}^n che commuta con tutti gli elementi di Γ è l'identità.

PROPOSIZIONE 2.27. *Se M è una varietà iperbolica chiusa la mappa*

$$\text{Isom}(M) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(M))$$

è iniettiva.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ e identifichiamo $\text{Isom}(M)$ con $N(\Gamma)/\Gamma$ e Γ con $\pi_1(M)$. Con queste identificazioni la mappa

$$N(\Gamma)/\Gamma \rightarrow \text{Out}(\Gamma)$$

è semplicemente l'azione di coniugio, che manda un elemento $\gamma \in N(\Gamma)$ nell'automorfismo $x \mapsto \gamma^{-1}x\gamma$ di Γ . L'automorfismo è banale (cioè è interno) se e solo se esiste $\eta \in \Gamma$ tale che $\gamma^{-1}x\gamma = \eta^{-1}x\eta$ per ogni $x \in \Gamma$, cioè tale che $\gamma\eta^{-1}$ commuta con tutti gli elementi di Γ . Dall'esercizio precedente segue che $\gamma = \eta \in \Gamma$ e quindi γ è banale in $N(\Gamma)/\Gamma$. La mappa è quindi iniettiva. \square

COROLLARIO 2.28. *Sia M una varietà iperbolica chiusa. Il gruppo $\text{Isom}(M)$ è finito. Due isometrie distinte non sono omotopicamente equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Due isometrie distinte hanno immagini in $\text{Out}(\pi_1(M))$ distinte e quindi non sono omotopicamente equivalenti. Il gruppo $\text{Isom}(M)$ è un gruppo di Lie compatto perché M è una varietà riemanniana compatta. Mostriamo che $\text{Isom}(M)$ è discreto: per fare ciò è sufficiente mostrare che l'identità è isolata.

Per assurdo, sia φ_i una successione di isometrie che converge all'identità. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste i tale che l'isometria φ_i sposta i punti meno di ε . Prendiamo ε minore del raggio di iniettività di M : ogni coppia di punti x e $\varphi_i(x)$ è collegata da un'unica geodetica γ_x di lunghezza $d(x, \varphi_i(x))$. Le geodetiche γ_x al variare di $x \in M$ possono essere usate per definire una combinazione convessa fra φ_i e l'identità e quindi mostrare che φ_i è omotopa all'identità. Le isometrie sono però uniche a meno di omotopia: assurdo. \square

Usiamo finalmente il Teorema di Mostow per dimostrare il risultato seguente.

TEOREMA 2.29. *Sia M una varietà iperbolica chiusa di dimensione $n \geq 3$. La mappa*

$$\text{Isom}(M) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(M))$$

è un'isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Mostow la mappa è suriettiva. Più precisamente, ogni elemento di $\text{Out}(\pi_1(M))$ è realizzato da una equivalenza omotopica $f: M \rightarrow M$ perché M è asferica (per la Proposizione 2.4) e la mappa f è a sua volta omotopa ad una isometria per il Teorema di Mostow. \square

Notiamo che quest'ultimo risultato è falso in dimensione $n = 2$. Per una superficie iperbolica chiusa S il gruppo $\text{Out}(\pi_1(S))$ è infinito, mentre il gruppo di isometrie $\text{Isom}(S)$ è sempre finito per quanto abbiamo appena visto.